TP. Point fixe et methode de Newton

Exercice 1

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\log(3x+2)}{3}$.

1. Tracer les graphes de g et des fonctions $y = a$, $y = b$, $y = x$.
2. Tracer le graphe de $|g'(x)|$ pour $x \in [a, b]$ où on approche $g'(x)$ par $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ et $h = 0.01$.
3. Trouver $L_g = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$.
4. Soit $tol = 10^{-3}$. Utiliser l'algorithme de point fixe pour $x_0 = b$ avec le critère d'arrêt $L_g^n(b - a) < tol$.

Exercice 2

Soit $g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 0.5(e^{-x} - \sin(x))$. Refaire les mêmes questions d'exercice précédent.

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{\log(3x+2)}{3}$.

1. Tracer le graphe de f et la droite $y = 0$.
2. Vérifier que $f(a)f(b) < 0$.
3. Tracer le graphe de f' et de la droite $y = 0$. On approche $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h = 0.01$. On vérifie visuellement que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.
4. Tracer le graphe de f'' et de la droite $y = 0$. On approche $f''(x)$ par $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ où $h = 0.01$. On vérifie visuellement que $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.
5. Trouver $x_0 \in \{a, b\}$, pour que la méthode de Newton converge, $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
6. Calculer x_n par la méthode de Newton en utilisant le critère d'arrêt $|x_n - x_{n-1}| < tol = 10^{-3}$.

Exercice 4

Soit $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\frac{x^3}{3} + x + 1)e^{x^2/2}$.

1. Montrer graphiquement que f s'annule pour une valeur $s \in [-2, 2]$.
2. Déterminer un intervalle $[a, b]$ de longueur 0.1 contenant s .
3. Déterminer par la méthode de Newton une valeur approchée de s en utilisant le critère d'arrêt $|x_n - x_{n-1}| < tol = 10^{-3}$ pour $x_0 = a$ et après, pour $x_0 = b$.