

TD Optimisation sans contraintes

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

- Déterminer les points critiques.
- Calculer les valeurs propres de la matrice hessienne en chaque point critique. Conclusions.
- Montrer que f est elliptique. Quelle est la constante d'ellipticité α ? Conclusions.

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

- Montrer que les valeurs propres de A notées λ_1, λ_2 sont réelles.
- Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = r + t$ et $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 = \det(A)$.
- Montrer

$$\det(A) > 0, r > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0, t > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0, r + t > 0$$

- Montrer

$$\det(A) > 0, r < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0, t < 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0, r + t < 0$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$.

- Déterminer les points critiques.
- Montrer que les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre deux sont vérifiées en chaque point critique.
- Étudier la fonction $\phi(x) = f(x, 1)$ dans un voisinage de $x = -1$. Étudier la fonction $\varphi(x) = f(x, -1)$ dans un voisinage de $x = 1$. Conclusions.
- Y a-t-il un minimum global ou un maximum global?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x^2 + y^2 - 1)^2, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

- Déterminer les points critiques.
- Montrer que les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre deux sont vérifiées en chaque point critique.
- Trouver les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où la matrice hessienne est définie positive. Conclusions.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

- a) Déterminer les points critiques.
- b) Montrer qu'il existe un maximum local strict. Pour les autres points critiques, montrer qu'une condition nécessaire d'optimalité d'ordre deux est vérifiée.
- c) Étudier la fonction $\phi(x) = f(x, 0)$ et tracer son graphique.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y + 4x - 5$.

- a) Déterminer les points critiques.
- b) Étudier la nature du point critique.
- c) Étudier la convexité de la fonction f .