Analele Universităţi Bucureşti
1997, Anul XLVI, No. 1, pp. 61-66

Sur la convergence d'un algorithme pour la résolution découplée d'un système de type Kuhn-Tucker

C.M. Murea

Résumé - Le but de cet article est de présenter un algorithme qui permet la résolution découplée d'un système de type Kuhn-Tucker provenant d'un problème d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique épaisse. L'avantage réside dans le fait que on peut utiliser les codes numériques performantes déja existentes pour résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure. La convergence de l'algorithme sera prouvé.

1 Présentation du problème

Soient $NW1, NW2, NQ$ et NM quatre nombres naturels non nuls. Sans risque de confusion, on utilise la même notation $(.,.)$ pour les produits scalaires habituels de $\mathbb{R}^{NW1}, \mathbb{R}^{NW2}, \mathbb{R}^{NQ}$ et $\mathbb{R}^{NM}$. Aussi, on fait la même convention pour la norme euclidienne $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

On note par $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de m lignes et n colonnes sur $\mathbb{R}$.

On pose le problème d'optimisation quadratique suivant:

$$\begin{cases} \inf J\left(w^1, w^2\right) \\ B_{11} w^1 = 0 \\ B_{21} w^1 + B_{22} w^2 = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où

$$\begin{cases} J : \mathbb{R}^{NW1} \times \mathbb{R}^{NW2} \to \mathbb{R} \\ J\left(w^1, w^2\right) = \frac{1}{2}\left(A_F w^1, w^1\right) + \frac{1}{2}\left(A_S w^2, w^2\right) \\ -\left(f_F, w^1\right) - \left(f_S, w^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_F \in M_{NW1}(\mathbb{R}) \text{ symétrique, tel que} \\ \exists \alpha_F > 0, \forall w^1 \in \mathbb{R}^{NW1}, \left(A_F w^1, w^1\right) \geq \alpha_F \left\|w^1\right\|^2 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} A_S \in M_{NW2}(\mathbb{R}) \text{ symétrique, tel que} \\ \exists \alpha_S > 0, \forall w^2 \in \mathbb{R}^{NW2}, \left(A_S w^2, w^2\right) \geq \alpha_S \left\|w^2\right\|^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$B_{11} \in M_{NQ,NW1}(\mathbb{R})$$

$$B_{21} \in M_{NM,NW1}(\mathbb{R})$$

$$B_{22} \in M_{NM,NW2}(\mathbb{R})$$

$$f_F \in \mathbb{R}^{NW1}, f_S \in \mathbb{R}^{NW2}$$

On note

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

et par la suite, on va travailler sous l'hypothèse suivante

$$\text{rang}\,(B) = NQ + NM \tag{1.4}$$

En utilisant des résultats classique de la théorie d'optimisation, on a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution (v, ν) pour le problème (1.1) sous les hypothèses (1.2), (1.3) et (1.4). En plus, il existe un multiplicateur de Lagrange (p, λ) dans $\mathbb{R}^{NQ} \times \mathbb{R}^{NM}$, tel que (v, ν, p, λ) est la solution unique du système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} A_F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & & \\ B_{21} & B_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \nu \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

qui est le système Kuhn-Tucker associé. Réciproquement, si (v, ν, p, λ) est la solution unique du système linéaire (1.5), alors (v, ν) est la solution unique du problème (1.1).

Le système (1.5) a été utilisé dans [2] et [3] pour la modélisation du ventricule gauche du coeur considéré comme une interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique épaisse.

Le système (1.5) peut être résolu numérique par l'Algorithme d'Uzawa ou par la Méthode du lagrangien augmenté.

Le but de cet article est de présenter un nouvel algorithme pour résoudre le système (1.5). L'avantage réside dans le fait que on peut utiliser les codes numériques performantes déja existentes pour résoudre le problème du fluide

$$\begin{pmatrix} A_F & B_{11}^t \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas le cas pour l'Algorithme d'Uzawa et la Méthode du lagrangien augmenté.

La convergence de ce nouvel algorithme sera prouvé.

2 Convergence d'algorithme

D'abord on présente le nouvel algorithme pour approcher la solution du problème (1.1) et après on prouve un résultat de convergence.

Algorithme

Pas 1 Initialisation

$$\text{Soient } \rho 1 > 0, k = 0, \lambda_0 \in \mathbb{R}^{NM}$$

Pas 2 Résolution du problème
trouver $(v_k, \nu_k) \in \mathbb{R}^{NW1} \times \mathbb{R}^{NQ}$, tel que

$$\begin{pmatrix} A_F & B_{11}^t \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F - B_{21}^t \lambda_k \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Pas 3 Résolution du problème
trouver $\nu_k \in \mathbb{R}^{NW2}$, tel que

$$A_S \nu_k = f_S - B_{22}^t \lambda_k \tag{2.2}$$

Pas 4 Test d'arrêt

$$\text{Si } B_{21} v_k + B_{22} \nu_k = 0 \text{ alors STOP} \tag{2.3}$$

Pas 5 Réinitialisation

$$\begin{gathered} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho 1 \left(B_{21} v_k + B_{22} \nu_k \right) \\ k \leftarrow k + 1 \text{ retour au pas 2} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Remarque 2.1 D'après (1.4), on a $rang\,(B_{11}) = NQ$ et $rang\,(B_{22}) = NM$. Sous l'hypothèse (1.2) et en tenant compte du fait que $rang\,(B_{11}) = NQ$, on obtient que le système linéaire (2.1) admet une solution unique. Une démonstration de ce résultat on peut trouver dans [1].

Sous l'hypothèse (1.3), le système linéaire (2.2) admet une solution unique, donc l'algorithme est bien défini.

Remarque 2.2 La solution du problème (2.1) peut être approcher en utilisant l'algorithme d'Uzawa/Gradient conjugué.

On preuve maintenant un résultat de convergence d'algorithme présenté ci-dessus.

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (1.2),(1.3) et (1.4), pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{NM}$ et $0 < \rho 1 < \min\left\{ \frac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \frac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2} \right\}$, l'algorithme (2.1)-(2.4) soit s'arrête après un nombre fini de pas, soit construit une suite $\{(v_k, \nu_k, p_k, \lambda_k)\}_{k \geq 0}$ convergeant vers la solution unique de (1.5).*

Démonstration: On va faire la preuve en trois étapes:

1) $\lim_{k\to\infty} (v_k) = v$ et $\lim_{k\to\infty} (\nu_k) = \nu$
2) $\lim_{k\to\infty} (\lambda_k) = \lambda$
3) $\lim_{k\to\infty} (p_k) = p$

1) Si $B_{21}v_k + B_{22}\nu_k = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} A_F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & & \\ B_{21} & B_{22} & \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ \nu_k \\ p_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque le système (1.5) admet une solution unique sous les hypothèses (1.2), (1.3) et (1.4), alors la solution est trouvée après un nombre fini de pas.

On suppose maintenant que l'algorithme ne s'arrête à l'étape 4.

D'après (1.5) on a $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$ et en utilisant (2.4), on obtient

$$\lambda_{k+1} - \lambda = \lambda_k - \lambda + \rho 1 \left[B_{21}\left(v_k - v\right) + B_{22}\left(\nu_k - \nu\right)\right]$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\left(a,b\right)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda_k - \lambda\|^2 + (\rho 1)^2 \|B_{21}\left(v_k - v\right) + B_{22}\left(\nu_k - \nu\right)\|^2 \\ +2\rho 1 \left(\lambda_k - \lambda, B_{21}\left(v_k - v\right) + B_{22}\left(\nu_k - \nu\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

On a l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_k - \lambda, B_{21}\left(v_k - v\right)\right) + \left(\lambda_k - \lambda, B_{22}\left(\nu_k - \nu\right)\right) \\ = \left(B_{21}^t\left(\lambda_k - \lambda\right), v_k - v\right) + \left(B_{22}^t\left(\lambda_k - \lambda\right), \nu_k - \nu\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

D'après (1.5) on a

$$A_F v + B_{11}^t p + B_{21}^t \lambda = f_F$$

et d'après (2.1) on a

$$A_F v_k + B_{11}^t p_k + B_{21}^t \lambda_k = f_F$$

ce qui implique

$$A_F\left(v_k - v\right) + B_{11}^t\left(p_k - p\right) + B_{21}^t\left(\lambda_k - \lambda\right) = 0 \tag{2.7}$$

En utilisant (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} &\left(B_{21}^t\left(\lambda_k - \lambda\right), v_k - v\right) \\ &= -\left(A_F\left(v_k - v\right), v_k - v\right) - \left(B_{11}^t\left(p_k - p\right), v_k - v\right) \\ &= -\left(A_F\left(v_k - v\right), v_k - v\right) - \left(p_k - p, B_{11}\left(v_k - v\right)\right) \end{aligned}$$

Mais d'après (1.5) on a $B_{11}v = 0$ et d'après (2.1) on a $B_{11}v_k = 0$. Donc on a

$$\left(B_{21}^t\left(\lambda_k - \lambda\right), v_k - v\right) = -\left(A_F\left(v_k - v\right), v_k - v\right) \tag{2.8}$$

D'après (1.5) on a

$$A_S \nu + B_{22}^t \lambda = f_S$$

et d'après (2.2) on a

$$A_S \nu_k + B_{22}^t \lambda_k = f_S$$

ce qui donne

$$A_S \left(\nu_k - v\right) + B_{22}^t \left(\lambda_k - \lambda\right) = 0 \tag{2.9}$$

En utilisant l'égalité précédente on obtient

$$\left(B_{22}^t \left(\lambda_k - \lambda\right), \nu_k - \nu\right) = -\left(A_S \left(\nu_k - \nu\right), \nu_k - \nu\right) \tag{2.10}$$

D'après (2.5),(2.6),(2.8) et (2.10) on obtient

$$\begin{gathered} 2\rho 1 \left(A_F \left(v_k - v\right), v_k - v\right) + 2\rho 1 \left(A_S \left(\nu_k - \nu\right), \nu_k - \nu\right) \\ - \left(\rho 1\right)^2 \left\| B_{21} \left(v_k - v\right) + B_{22} \left(\nu_k - \nu\right)\right\|^2 \\ = \left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2 - \left\|\lambda_{k+1} - \lambda\right\|^2 \end{gathered}$$

On a l'inégalité

$$\begin{gathered} \left\| B_{21} \left(v_k - v\right) + B_{22} \left(\nu_k - \nu\right)\right\|^2 \\ \leq \left(\left\| B_{21}\right\| \left\| v_k - v\right\| + \left\| B_{22}\right\| \left\|\nu_k - \nu\right\|\right)^2 \\ \leq 2 \left(\left\| B_{21}\right\|^2 \left\| v_k - v\right\|^2 + \left\| B_{22}\right\|^2 \left\|\nu_k - \nu\right\|^2\right) \end{gathered}$$

Puisque $\rho 1 > 0$ et en utilisant les hypothèses (1.2) et (1.3) on obtient

$$\begin{gathered} 2\rho 1 \left(\alpha_F - \rho 1 \left\| B_{21}\right\|^2\right) \left\| v_k - v\right\|^2 + 2\rho 1 \left(\alpha_S - \rho 1 \left\| B_{22}\right\|^2\right) \left\|\nu_k - \nu\right\|^2 \\ \leq \left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2 - \left\|\lambda_{k+1} - \lambda\right\|^2 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Si $0 < \rho 1 < \min\left\{\frac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \frac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2}\right\}$, alors d'après l'inégalité précédente on obtient

$$0 \leq \left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2 - \left\|\lambda_{k+1} - \lambda\right\|^2$$

donc la suite $\left\{\left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$ est décroissante. Puisque $0 \leq \left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2$ alors la suite est convergeante, donc

$$\lim_{k\to\infty} \left(\left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2 - \left\|\lambda_{k+1} - \lambda\right\|^2\right) = 0$$

En utilisant la relation (2.11) on obtient la conclusion de la première étape.

2) Intéressons nous maintenant à la convergence de $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$.

D'après la première étape, la suite $\left\{\left\|\lambda_k - \lambda\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$ converge, donc $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ est bornée et en conséquence, il existe au moins une sous-suite $\{\lambda_{k_s}\}_{s\geq 0}$ convergeante vers une limite $\overline{\lambda}$.

En passant à la limite dans l'égalité (2.9) et en tenant compte de la première étape, on obtient

$$B_{22}^t \left(\overline{\lambda} - \lambda\right) = 0$$

Mais sous l'hypothèse (1.4) on a $rang\,(B_{22}) = NM$, donc les colonnes de B_{22}^t sont linéairement indépendantes, ce qui implique $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ a un unique point d'accumulation.

Pour finir la deuxième étape, on utilise le résultat suivant: dans un espace de dimension finie, une suite bornée avec un unique point d'accumulation est convergente.

3) Intéressons nous maintenant à la convergence de la suite $\{p_k\}_{k\geq 0}$.

D'après (2.1) on a

$$B_{11}^t p_k = f_F - A_F v_k - B_{21}^t \lambda_k$$

D'après les deux premières étapes, on obtient que $B_{11}^t p_k$ est bornée.

Puisque $rang\,(B_{11}) = NQ$, alors $\{p_k\}_{k\geq 0}$ est bornée. Soit $\overline{p}$ un point d'accumulation de cette suite. En passant à la limite dans l'égalité (2.7), on obtient

$$B_{11}^t\,(\overline{p} - p) = 0$$

Puisque $rang\,(B_{11}) = NQ$, alors $\overline{p} = p$. Selon le même type de raisonnement que celui utilisé dans la deuxième étape, on obtient la convergence de $\{p_k\}_{k\geq 0}$ vers p. □

3 Tests numériques

Pour les tests numériques, on a utilisé les valeurs suivantes: $NW1 = 1317$, $NW2 = 402$, $NQ = 103$, $NM = 171$. Les matrices $A_F, A_S, B_{11}, B_{21}, B_{22}$ et les vecteurs f_F, f_S proviennent d'un problème tridimensionnel de la modélisation du coeur humain (voir [2]).

Les résultats numériques sont très satisfaisants, conformément à la réalité.

Références bibliographiques

[1] P.G. CIARLET - *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1988

[2] C.M. MUREA - *Modélisation mathématique et numérique d'un problème tridimensionnel d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, juin 1995

[3] C.M. MUREA & J.-M. CROLET - *A stable algoritm for a fluid-structure interaction problem in 3D*, dans Contact Mechanics II, Computational Techniques, M.H. Aliabadi & C. Alessandri (eds.), p. 325-332, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1995

Dr Cornel Marius MUREA, Université de Bucarest, Faculté de Mathématique, 14 str. Academiei, 70109 Bucarest, Roumanie, e-mail: `Cornel.Murea@math.unibuc.ro`