

Simulations numériques des problèmes d'interaction fluide-structure et applications

Cornel Marius MUREA

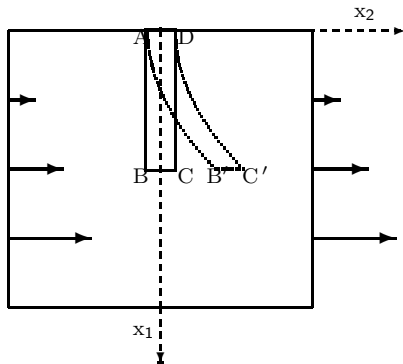
Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications,
Université de Haute-Alsace,
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
cornel.murea@uha.fr
<http://www.math.uha.fr/edp/murea/>

Plan

- ▶ Exemples d'interaction fluide-structure
- ▶ Modèles mathématiques. ALE
- ▶ Couplage d'équations
- ▶ Points fixes, la méthode de Newton ou les moindres carrés
- ▶ Simulations numériques

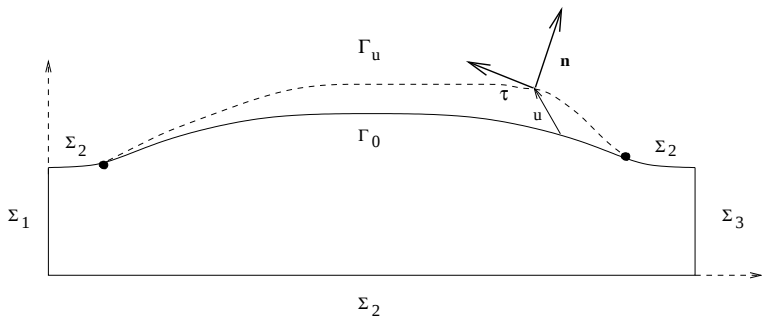
Construction d'automobiles

absorbeur des chocs hydrauliques, conception des senseurs,
lubrification, airbag



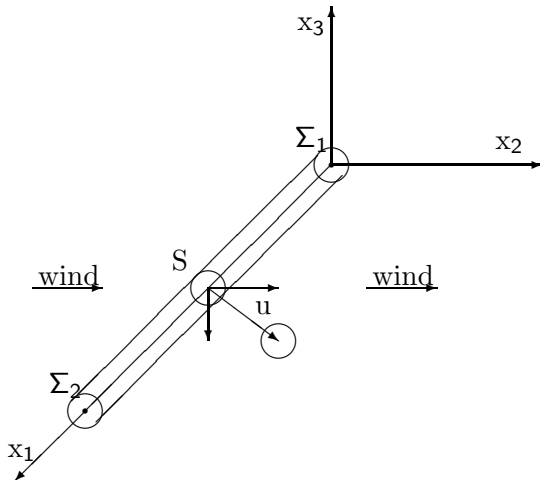
Bio-mécanique

écoulement du sang dans les artères, conception des coeurs artificiels ou des poumons artificiels

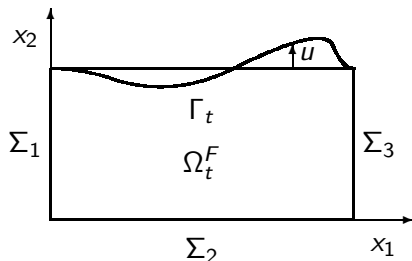


Génie civil

oscillations des longs ponts ou des hautes structures métalliques
sous l'action du vent



Notations



Les équations du fluide et celles de la structure sont couplées par deux types de conditions aux limites à l'interface

- ▶ continuité de vitesses : le fluide adhère aux parois ou d'une manière équivalente, les vitesses du fluide et de la structure sont égales à l'interface,
- ▶ continuité de forces de surface : les forces agissant à l'interface sur la structure sont égales et de sens contraire aux celles qui agissent sur le fluide.

Modèle mathématique pour la structure

Trouver u le déplacement, tel que

$$\rho^S h^S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t) + \frac{E(h^S)^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x_1, t) = \eta(x_1, t),$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$u(L, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(L, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$u(x_1, 0) = u^0(x_1), \quad x_1 \in (0, L)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = \dot{u}^0(x_1), \quad x_1 \in (0, L)$$

Modèle mathématique pour le fluide

Trouver la vitesse $\mathbf{v}$ et la pression p du fluide

$$\rho^F \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}^F, \quad \forall t \in (0, T), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall t \in (0, T), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Sigma_1 \times (0, T)$$

$$p = P_{in}, \quad \text{on } \Sigma_1 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad \text{on } \Sigma_2 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Sigma_3 \times (0, T)$$

$$p = P_{out}, \quad \text{on } \Sigma_3 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v}(x_1, H + u(x_1, t), t) = \left(0, \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) \right)^T, \\ \forall (x_1, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0^F$$

Couplage fluide-structure

Trouver u le déplacement de la structure, la vitesse $\mathbf{v}$ et la pression p du fluide, tels que

$$\eta(x_1, t) = - \left(\sigma^F \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right)_{(x_1, H+u(x_1, t))} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, t) \right)^2}$$

Coordonnées ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)

$$\widehat{\Omega}^F = (0, L) \times (0, H), \quad \widehat{\Gamma} = (0, L) \times \{H\}$$

$$\mathcal{A}_t(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \left(\widehat{x}_1, \frac{H + u(\widehat{x}_1, t)}{H} \widehat{x}_2 \right)^T$$

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\widehat{\mathbf{x}}), \quad \widehat{\mathbf{v}}(\widehat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{v}(\mathcal{A}_t(\widehat{\mathbf{x}}), t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}}, t) - \left(\frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{D^{\mathcal{A}} \mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}}, t)$$

Approximation de la dérivée ALE

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}}, t_{n+1}) &\approx \frac{\widehat{\mathbf{v}}(\widehat{\mathbf{x}}, t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{v}}(\widehat{\mathbf{x}}, t_n)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(\mathcal{A}_{t_{n+1}}(\widehat{\mathbf{x}}), t_{n+1}) - \mathbf{v}(\mathcal{A}_{t_n}(\widehat{\mathbf{x}}), t_n)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \mathbf{v}(\mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}), t_n)}{\Delta t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^n(\mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t}.\end{aligned}$$

$$\vartheta^{n+1}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}})|_{t=t_{n+1}} = \left(0, \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_{n+1}) \frac{x_2}{H + u(x_1, t_{n+1})} \right)^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_{n+1}) \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^n(\mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}))}{\Delta t} - (\vartheta^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{V}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^n(\mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}(\mathbf{x}))$$

$$\rho^F \left(\frac{\mathbf{v}^{n+1}}{\Delta t} + ((\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} \right)$$

$$-\mu \Delta \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \rho^F \frac{\mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{f}^F$$

in $\Omega_{t_{n+1}}^F$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \text{ in } \Omega_{t_{n+1}}^F$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Sigma_1$$

$$p^{n+1} = P_{in}(\cdot, t_{n+1}) \text{ on } \Sigma_1$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{g}(\cdot, t_{n+1}) \text{ on } \Sigma_2$$

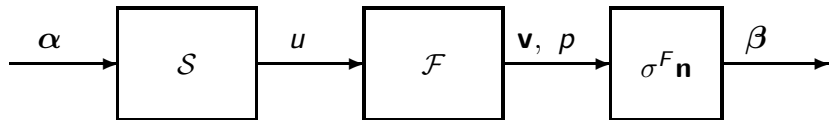
$$\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Sigma_3$$

$$p^{n+1} = P_{out}(\cdot, t_{n+1}) \text{ on } \Sigma_3$$

$$\mathbf{v}^{n+1}(x_1, H + u(x_1, t_{n+1}), t) = \left(0, \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_{n+1}) \right)^T,$$

$$0 < x_1 < L.$$

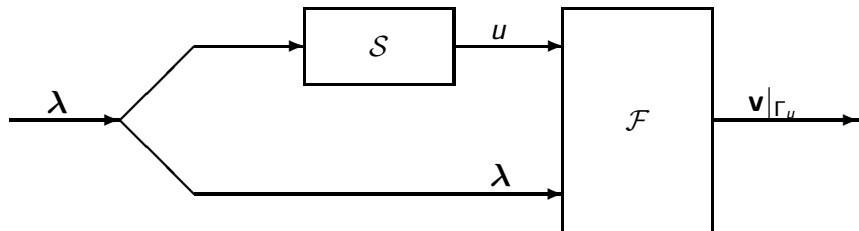
Stratégies pour résoudre le problème couplé



Point fixe et la Méthode de Newton :

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha) = \alpha, \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha) - \alpha = 0.$$

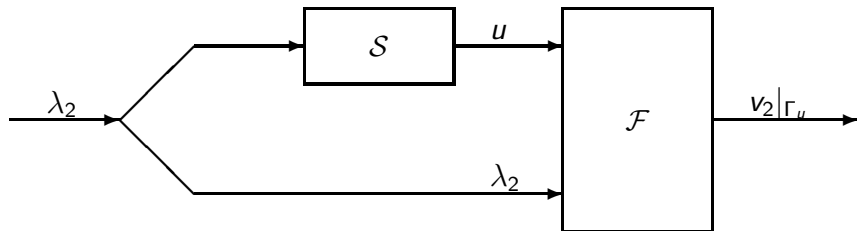
Approche contrôlabilité. I



On résout le problème du fluide avec les conditions aux limites à l'interface

$$\sigma^F \mathbf{n} = \lambda$$

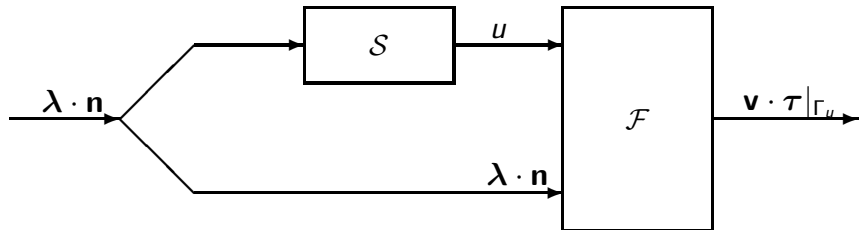
Approche contrôlabilité. II



On résout le problème du fluide avec les conditions aux limites à l'interface

$$v_1 = 0, \quad e_2 \cdot \sigma^F \mathbf{n} = \lambda_2$$

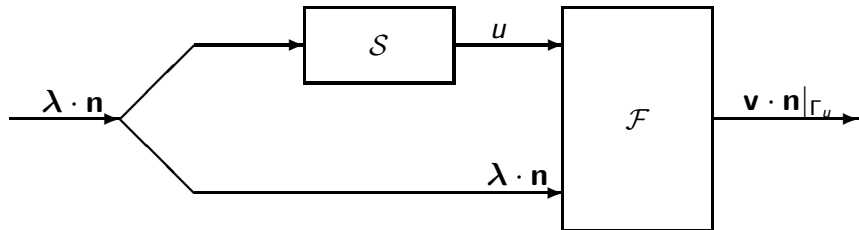
Approche contrôlabilité. III



On résout le problème du fluide avec les conditions aux limites à l'interface

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n} = \lambda \cdot \mathbf{n}$$

Approche contrôlabilité. IV



On résout le problème du fluide avec les conditions aux limites à l'interface

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^F \mathbf{n} = \lambda \cdot \mathbf{n}$$

Points fixes, la méthode de Newton ou les moindres carrés

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha)$$

- Points fixes

$$G(\alpha) = \alpha, \quad \alpha^{k+1} = G(\alpha^k)$$

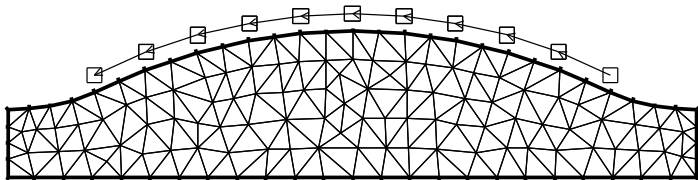
- Méthode de Newton

$$F(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - G(\alpha) = 0, \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k - \left(\nabla F(\alpha^k)^T \right)^{-1} F(\alpha^k)$$

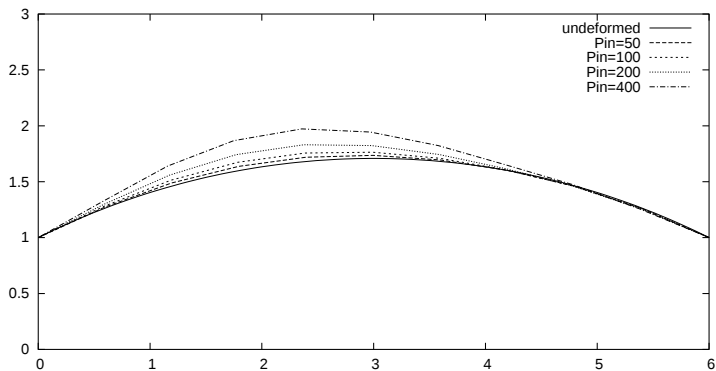
- Moindres carrés

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}^m} J(\alpha) = \frac{1}{2} \|F(\alpha)\|^2, \quad \nabla J(\alpha) = (\nabla F(\alpha)) F(\alpha)$$

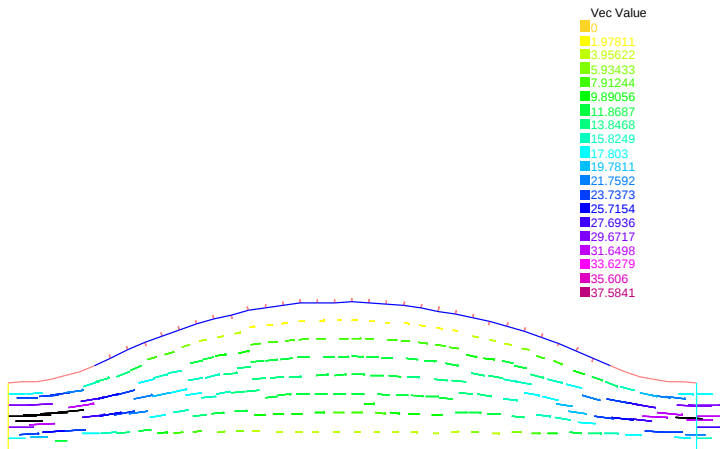
Resultats numériques. Poumon



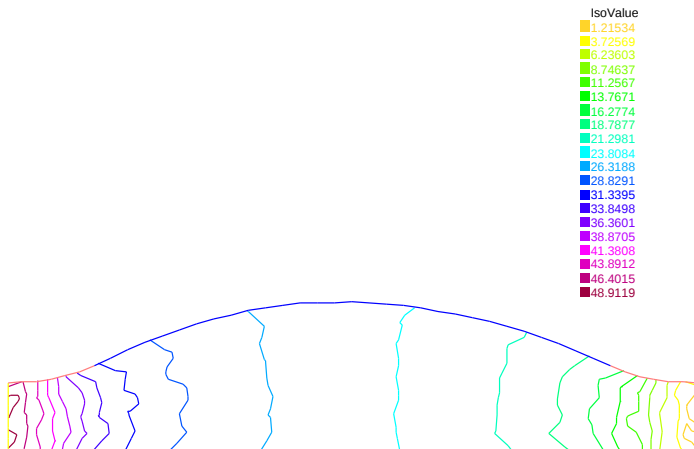
Déformation du paroi



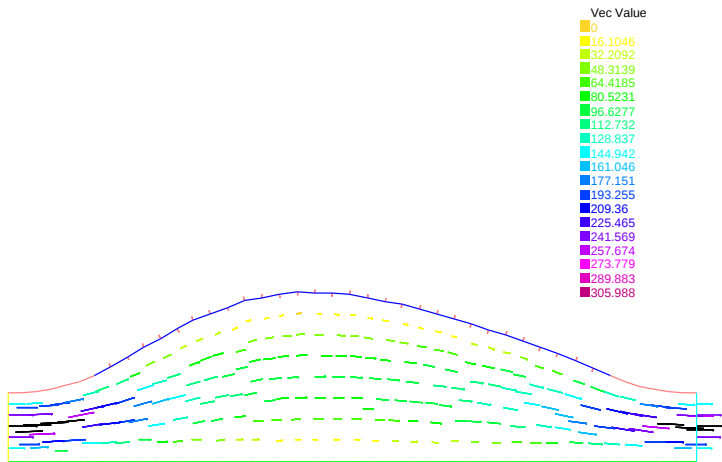
Vitesse du fluide dans le cas $P_{in} = 50$



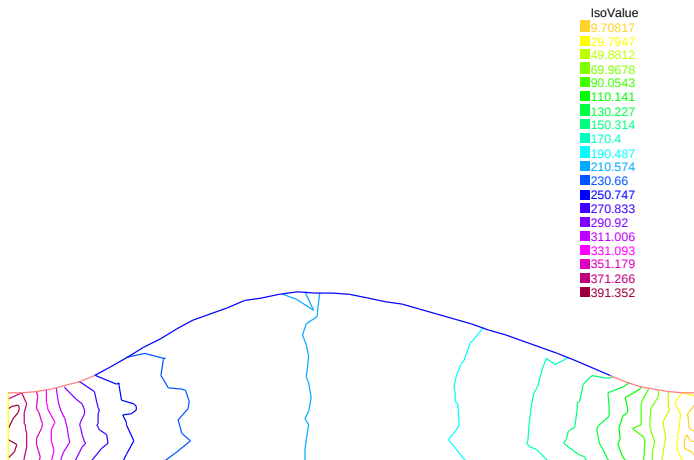
Pression du fluide dans le cas $P_{in} = 50$



Vitesse du fluide dans le cas $P_{in} = 400$



Pression du fluide dans le cas $P_{in} = 400$

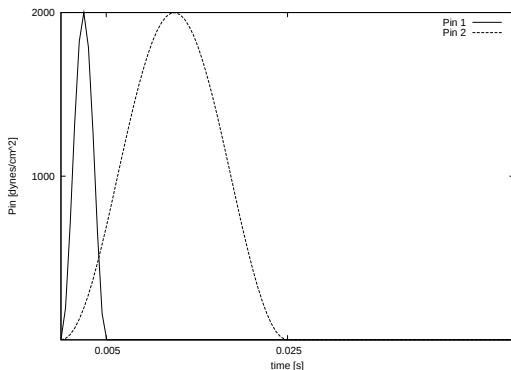


Résultats numériques. Écoulement du sang dans une artère

- ▶ $L = 6 \text{ cm}$ et $H = 1 \text{ cm}$.
- ▶ Fluide : viscosité $\mu = 0.035 \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}$, masse volumique $\rho^F = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
- ▶ Structure : épaisseur $h = 0.1 \text{ cm}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.5$, masse volumique $\rho^S = 1.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

FreeFem++

Pression à l'entrée



- 1) Module de Young $E = 0.75 \cdot 10^6 \frac{g}{cm \cdot s^2}$, temps final $T = 0.25 \text{ s}$
- 2) Module de Young $E = 3 \cdot 10^6 \frac{g}{cm \cdot s^2}$, temps final $T = 0.1 \text{ s}$

Perspectives : interaction coque - Navier Stokes 3D

