

# Couplage d'équations et résolution numérique des problèmes d'interaction fluide-structure

Cornel Marius MUREA

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications,  
Université de Haute-Alsace

**Habilitation à Diriger des Recherches**  
**Spécialité : Mathématiques**

Mulhouse, le 8/02/2007

# Publications

- ▶ 10 publications dans des revues internationales ou nationales avec comité de lecture
- ▶ 7 publications dans des actes de colloques à large diffusion
- ▶ 3 rapports de recherche
- ▶ 2 pré-publications

## Domaines d'intérêt :

- ▶ couplage fluide-structure dans le cas où la déformation du domaine fluide est négligeable (6)
- ▶ interaction fluide-structure avec prise en compte de la déformation du domaine fluide (10)
- ▶ écoulements aux frontières libres (2)
- ▶ milieu poreux (2), optimisation d'une antenne satellite (1), hélices élastiques (1)

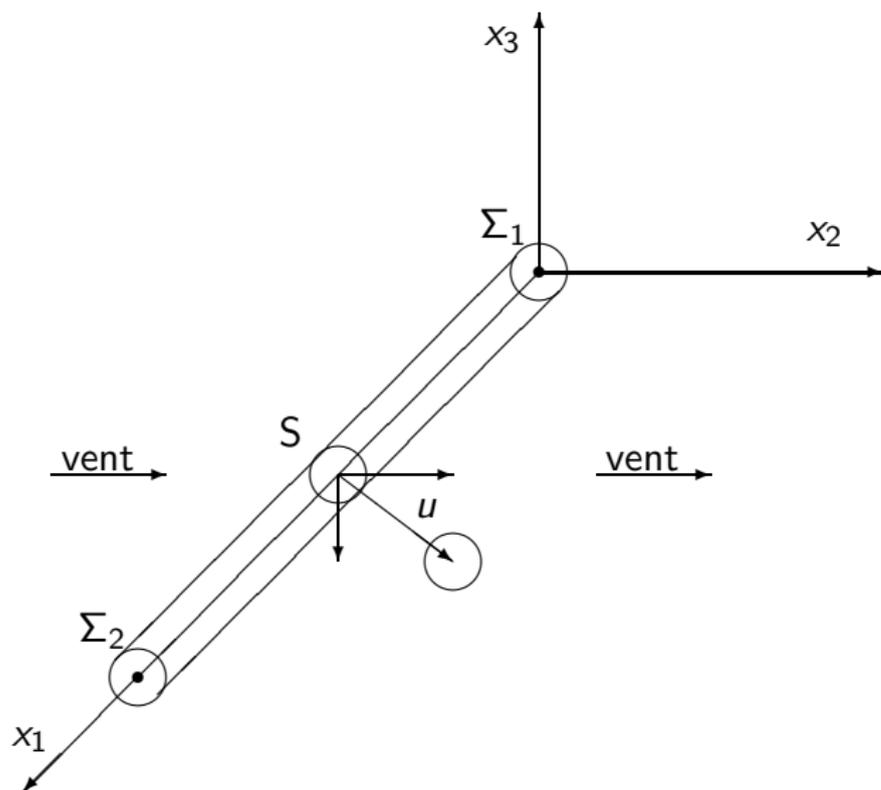
# Problèmes stationnaires d'interaction fluide-structure

- Chapitre 1. C.M. Murea, Y. Maday, Existence of an optimal control for a nonlinear fluid-cable interaction problem, Rapport de recherche CEMRACS 96, Interaction fluide-structure, Luminy
- Chapitre 2. C.M. Murea, C. Vazquez, Sensitivity and approximation of coupled fluid-structure equations by virtual control method, *Appl. Math. Optim.*, **52** (2005), no. 2, 183–218
- Chapitre 3. C.M. Murea, The BFGS algorithm for a nonlinear least squares problem arising from blood flow in arteries, *Comput. Math. Appl.*, **49** (2005), pp. 171–186
- Chapitre 4. C.M. Murea, Optimal control approach for the fluid-structure interaction problems, *Proceedings of the Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems*, Rolduc and Gaeta, 2001, J. Bemelmans et al (eds.), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 442–450, 2002

# Problèmes d'évolution

- Chapitre 5. C.M. Murea, Numerical simulation of a pulsatile flow through a flexible channel, accepté dans *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*
- Chapitre 6. C.M. Murea, Dynamic meshes generation using the relaxation method with applications to fluid-structure interaction problems, *An. Univ. București Mat.*, **47** (1998), No. 2, pp. 177–186
- Chapitre 7. C.M. Murea, G. Hentschel, Finite element methods for investigating the moving boundary problem in biological development, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 64, pp. 357–371, Birkhauser Verlag, Basel, 2005
- Chapitre 8. C.M. Murea, G. Hentschel, A Finite Element Method for Growth in Biological Development, *Math. Biosci. Eng.* **4** (2007) 2, 339–353

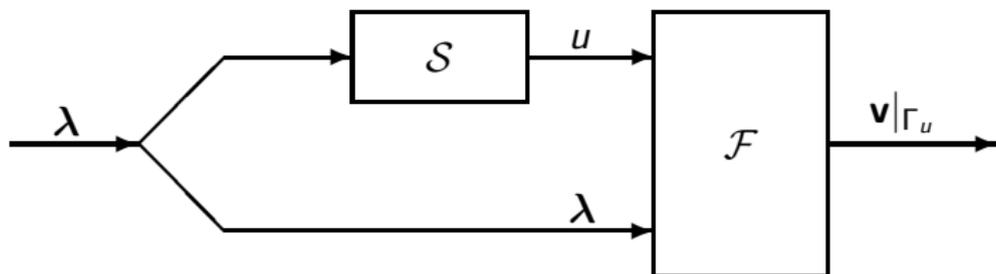
# Exemple d'interaction fluide-structure



# Problème stationnaire d'interaction fluide-structure

- ▶ trouver  $u$  le déplacement de la structure qui vérifie un système des équations aux dérivées partielles dans  $\Omega_0^S$  avec des conditions aux limites sur  $\partial\Omega_0^S \setminus \Gamma_0$ ,
- ▶ trouver  $\mathbf{v}$  la vitesse et  $p$  la pression du fluide qui vérifient un système des équations aux dérivées partielles dans  $\Omega_u^F$  avec des conditions aux limites sur  $\partial\Omega_u^F \setminus \Gamma_u$ ,
- ▶  $\boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^F = -\boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n}^S$  à l'interface,
- ▶  $\mathbf{v} = 0$  à l'interface.

## Approche contrôle optimal. I



$$T_u(\Omega_0^F) = \Omega_u^F, \quad T_u(\Gamma_0) = \Gamma_u, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \circ T_u$$

$$\inf_{\hat{\lambda} \in \hat{K}} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{0, \Gamma_0}^2$$

# Existence d'un contrôle optimal

## Théorème (1996)

*L'application  $\widehat{\lambda} \rightarrow \frac{1}{2} \|\widehat{\mathbf{v}}\|_{0,\Gamma_0}^2$  est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. Si  $\widehat{K}$  est compact, alors il existe au moins un contrôle optimal. Le résultat reste valable pour  $\widehat{K}$  borné.*

**Difficulté :** pour  $\widehat{\lambda}^k$  et  $\widehat{\mathbf{v}}^k$  faiblement convergents, il faut prouver la convergence de

$$\int_{\Omega_0^F} a(u^k) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}^k}{\partial \widehat{x}_j} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \widehat{x}_p} d\widehat{x}.$$

**Problème ouvert :** la valeur optimale de la fonction coût est-elle nulle ?

# Existence d'un point fixe

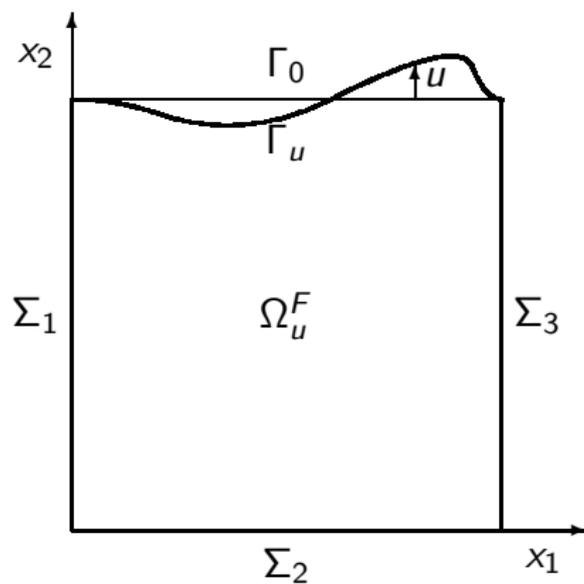
$$u|_{\Gamma_0} \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathbf{v}, p) \xrightarrow{\sigma^F \mathbf{n}^F} \boldsymbol{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{S}} u|_{\Gamma_0}$$

Resultats d'existence d'un point fixe

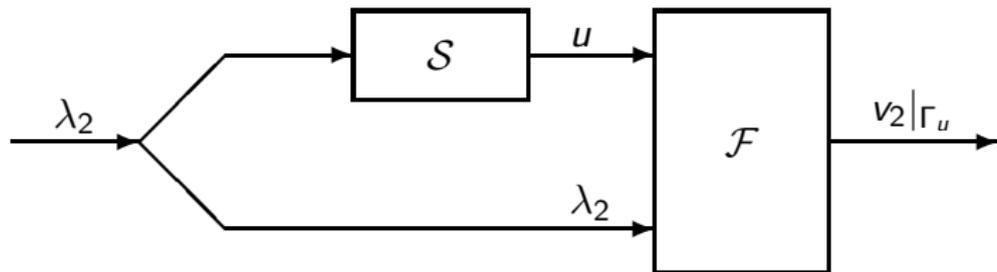
- ▶ **dans le cas stationnaire** : Grandmont C. (1998, 2002), Bayada G., Chambat M., Cid B., Vazquez C. (2004), Flori, F.; Giudicelli, B.; Orenge, P (2006),
- ▶ **dans le cas d'evolution** : Grandmont C., Maday Y. (2000), Desjardins B., Esteban M. , Grandmont C., Le Tallec P. (2001), Beirao da Veiga H. (2004).

**Problèmes pratiques** : l'application n'est pas forcément contractante pour des structures avec une rigidité faible, initialisation, domaine fluide avec des coins, espaces de travail compliqués.

## Un deuxième exemple d'interaction fluide-structure



## Approche contrôle optimal. II



$$\inf_{\hat{\lambda}_2} j(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{2} \|\hat{v}_2\|_{0, \Gamma_0}^2$$

# Formule analytique du gradient

## Théorème

La fonction coût est Fréchet différentiable et on a :

$$j'(\hat{\lambda}) \hat{\mu} = \left( \frac{\partial \hat{a}_F}{\partial u}(u, \hat{v}, \hat{z}) + \frac{\partial \hat{b}_F}{\partial u}(u, \hat{z}, \hat{p}) + \frac{\partial \hat{b}_F}{\partial u}(u, \hat{v}, \hat{r}) \right) A_S^{-1} C_S \hat{\mu} - \int_{\Omega_0^F} \frac{(A_S^{-1} C_S \hat{\mu})(\hat{x}_1)}{H} f^F \cdot \hat{z} d\hat{x} + \int_{\Gamma_0} \hat{v}_2 \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{\lambda}}(u, \hat{\lambda}) \hat{\mu} d\sigma$$

où

- ▶  $u$  est la solution du problème structure en imposant les forces verticales  $\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}$  à l'interface,
- ▶  $(\hat{v}, \hat{p})$  est la solution d'un problème de Stokes avec les C.L. à l'interface  $(\sigma^F n) \cdot e_2 = \lambda$  et  $v_1 = 0$ ,
- ▶  $(\hat{z}, \hat{r})$  l'état adjoint est la solution d'un problème de Stokes avec les C.L. à l'interface  $(\sigma^F n) \cdot e_2 = v_2$  et  $z_1 = 0$ .

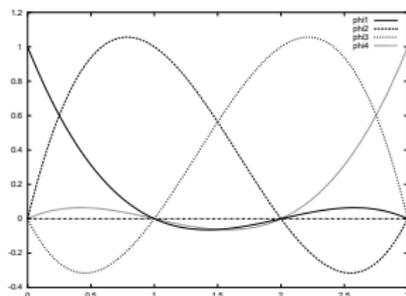
# Avantages de la formule analytique

- ▶ **Précision** par rapport au gradient calculé par des différences finies,
- ▶ **Efficacité.** Pour obtenir le gradient dans un point  $\hat{\lambda}$ , on doit calculer  $j'(\hat{\lambda}) \hat{e}_i$ , où  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  est la base canonique. Les systèmes linéaires à résoudre ont la même matrice ! Seulement le second membre dépend de  $e_i$ .

Fernández M.A., Moubachir M. (2005) propose une formule analytique en utilisant la dérivée matérielle.

# Approximation

Les forces à l'interface sont approchées par  $c + \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i$ .



Les déplacements de la structure peuvent être calculés d'une manière analytique, si  $\phi_i$  sont des polynômes.

Pour le fluide, on utilise des éléments finis.

Pour minimiser la fonction coût, on emploie la méthode BFGS.

Après 5 itérations, on obtient  $\mathcal{J} = 0.144683623$  et

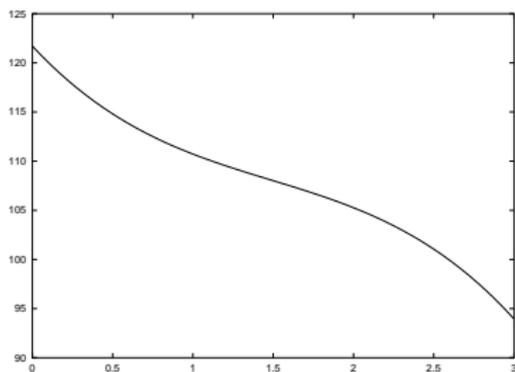
$$\nabla \mathcal{J} = (0.000255, 0.004768, -0.020800, 0.009256)^T.$$

10 itérations sont nécessaires pour attendre  $\|\nabla \mathcal{J}\|_{\infty} \leq 10^{-6}$ .

# Résultats numériques

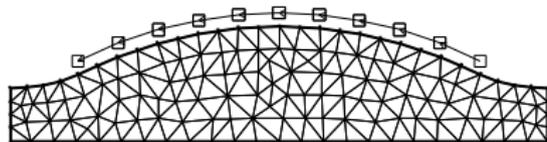


déplacement de la structure et vitesse du fluide

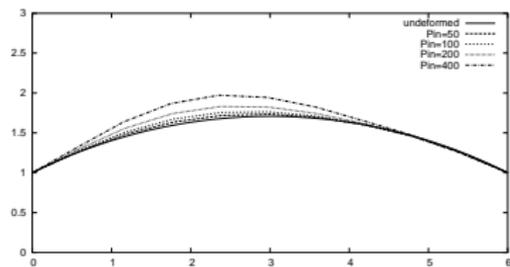


les forces à l'interface

# Le même approche dans le cas d'une interface courbe

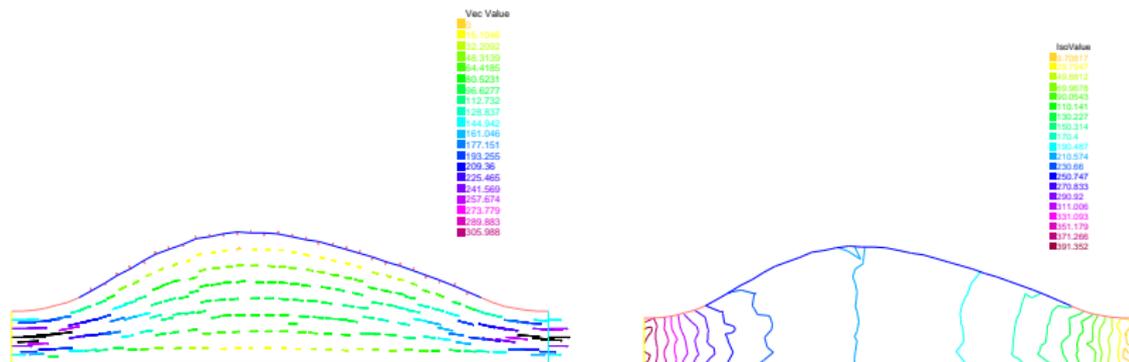


les maillages

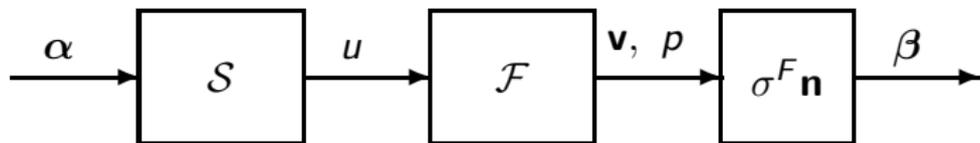


les déplacements de l'interface

# Vitesse et pression du fluide pour $P_{in} = 400$



## Approche contrôle optimal. III



$$\inf_{\alpha} \frac{1}{2} \|\alpha - \beta\|^2$$

### Proposition

Si  $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega_u^F))^2$ ,  $p \in H^1(\Omega_u^F)$ ,  $\mathbf{v}$  est constante sur  $\Gamma_u$ ,  
 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega_u^F$ , alors  $-(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p$  sur  $\Gamma_u$ .

# Sensibilité de l'interface

## Proposition

Pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c(\alpha) \in \mathbb{R}$  vérifient

$$u''''(x_1) = \frac{1}{D} (f^S(x_1) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i(x_1) + c(\alpha)), \quad \forall x_1 \in (0, L)$$
$$u(0) = u(L) = u'(0) = u'(L) = 0,$$

$$\int_0^L u(x_1) dx_1 = 0,$$

alors les applications  $\alpha \rightarrow u$  and  $\alpha \rightarrow c(\alpha)$  sont affines. On a

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$$
$$c(\alpha) = c_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$$

où

$$u_0''''(x_1) = \frac{1}{D} (f^S(x_1) + c_0),$$
$$u_i''''(x_1) = \frac{1}{D} (\phi_i(x_1) + c_i),$$

satisfaisant les conditions aux limites et la condition de la conservation du volume.

# Sensibilité par rapport au mouvement du domaine

## Proposition

Les applications  $\alpha \in \mathbb{R}^m \mapsto \widehat{\mathbf{v}} \in (H^1(\Omega_0^F))^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^m \mapsto \widehat{\mathbf{p}} \in \widehat{\mathcal{Q}}$  sont différentiables et les dérivées partielles  $\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \alpha_k} \in \widehat{\mathcal{W}}$  et  $\frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}}{\partial \alpha_k} \in \widehat{\mathcal{Q}}$  vérifient

$$\begin{aligned} \widehat{a}_F \left( \alpha, \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \alpha_k}, \widehat{\mathbf{w}} \right) + \widehat{b}_F \left( \alpha, \widehat{\mathbf{w}}, \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}}{\partial \alpha_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left\langle \widehat{\mathbf{f}}^F(\alpha), \widehat{\mathbf{w}} \right\rangle \\ &\quad - \frac{\partial \widehat{a}_F}{\partial \alpha_k}(\alpha, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}) - \frac{\partial \widehat{b}_F}{\partial \alpha_k}(\alpha, \widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\mathbf{p}}) \\ \widehat{b}_F \left( \alpha, \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}}{\partial \alpha_k}, \widehat{\mathbf{q}} \right) &= - \frac{\partial \widehat{b}_F}{\partial \alpha_k}(\alpha, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Exemple de dérivée calculée dans le domaine de référence

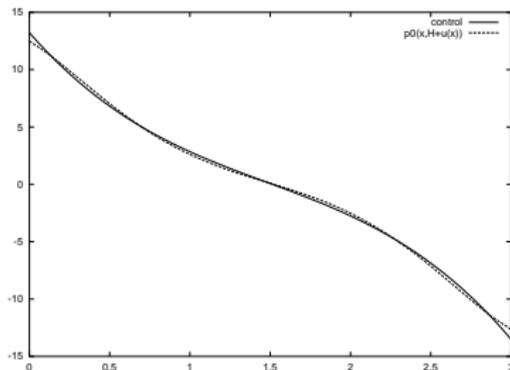
$$\frac{\partial \widehat{b}_F}{\partial \alpha_k}(\alpha, \widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\mathbf{q}}) = - \int_{\Omega_0^F} \left( \frac{u_k(\widehat{x}_1)}{H} \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \widehat{x}_1} - \frac{u'_k(\widehat{x}_1) \widehat{x}_2}{H} \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \widehat{x}_2} \right) \widehat{q} \, d\widehat{\mathbf{x}}$$

# Résultats numériques

Le point de départ pour l'algorithme BFGS est  $\alpha = 0$ .

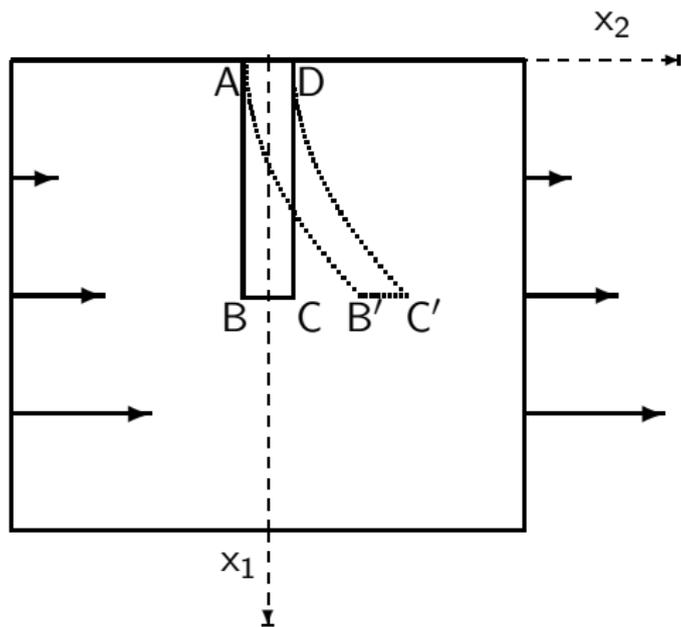
Le critère d'arrêt est  $\|\nabla \mathcal{J}\|_{\infty} \leq 10^{-6}$ .

Après 5 itérations on obtient  $\mathcal{J} = 0.165653$  et  $\|\nabla \mathcal{J}\|_{\infty} = 2.5e - 7$ .

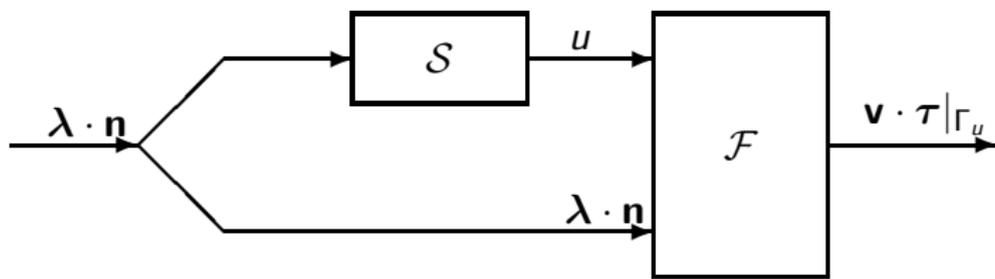


le contrôle optimal  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \left( \phi_i(x_1) - \frac{1}{L} \int_0^L \phi_i(x_1) dx_1 \right)$  et  
l'observation optimale  $p_0(x_1, H + u(x_1))$

# Un troisième exemple d'interaction fluide-structure



## Approche contrôle optimal. IV



Pour résoudre le problème fluide on impose sur l'interface les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad p = \lambda \cdot \mathbf{n}.$$

Il faut utiliser une formulation vitesse-pression-tourbillon.

# Formulation variationnelle du type moindres carrés

## Proposition

Le problème : trouver  $v - v_0 \in W$ ,  $p - p_0 \in Q$ ,  $\omega \in M$ , tels que

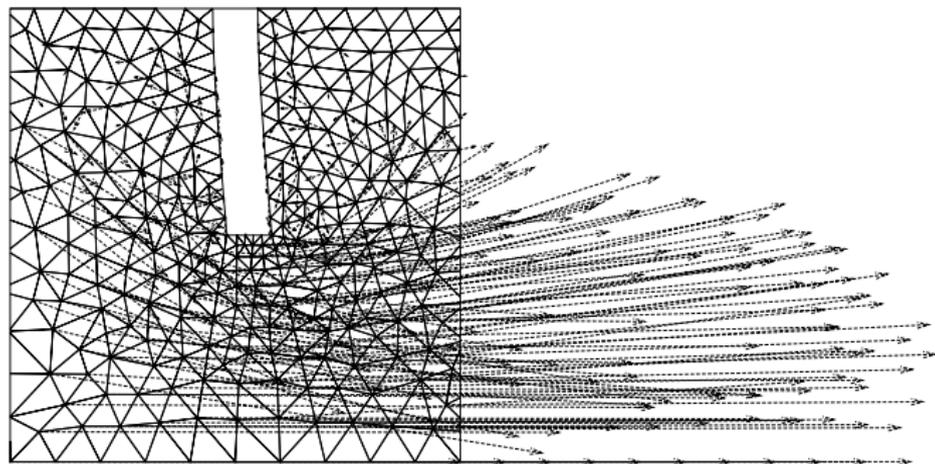
$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) \\ & + \left( \omega - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \rho - \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) + (\operatorname{div} v, \operatorname{div} w) \\ & = \left( f_1^F, \frac{\partial q}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) + \left( f_2^F, \frac{\partial q}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right), \forall w, \forall q, \forall \rho \end{aligned}$$

a une solution unique.

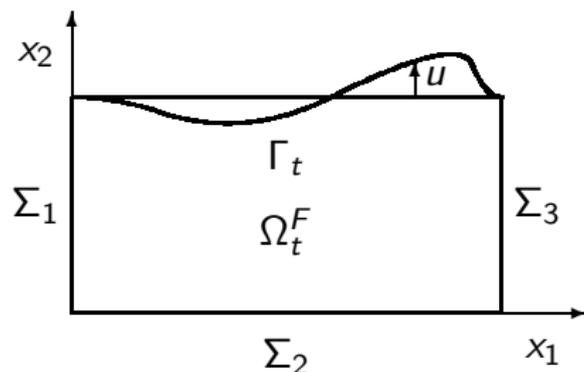
## Résultats numériques

$$p_0(x_1, x_2) = \begin{cases} (\alpha_1 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_1^2), & \text{si } (x_1, x_2) \in ]A, B'] \\ (\alpha_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_1^2), & \text{si } (x_1, x_2) \in ]D, C'] \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{2r}\right) p_0(B') + \left(\frac{1}{2} + \frac{x_2}{2r}\right) p_0(C'), & \text{si } (x_1, x_2) \in ]B', C'] \end{cases}$$

Le terme div a été pénalisé par  $10^5$ . On obtient  $J = 2.360e - 04$ .



# Problèmes évolutifs d'interaction fluide-structure



Les équations du fluide et celles de la structure sont couplées par deux types de conditions aux limites à l'interface

- ▶ continuité de vitesses : le fluide adhère aux parois ou d'une manière équivalente, les vitesses du fluide et de la structure sont égales à l'interface,
- ▶ continuité de forces de surface : les forces agissant à l'interface sur la structure sont égales et de sens contraire aux celles qui agissent sur le fluide.

## Modèle de type plaque pour la structure

Trouver  $u$  le déplacement transversal, tel que

$$\rho^S h^S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t) + \frac{E(h^S)^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x_1, t) = \eta(x_1, t),$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$u(L, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(L, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$u(x_1, 0) = u^0(x_1), \quad x_1 \in (0, L)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = \dot{u}^0(x_1), \quad x_1 \in (0, L)$$

# Équations de Navier-Stokes

Trouver la vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression  $p$  du fluide, tels que

$$\rho^F \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}^F, \quad \forall t \in (0, T), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall t \in (0, T), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1 \times (0, T)$$

$$p = P_{in}, \quad \text{sur } \Sigma_1 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \Sigma_2 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Sigma_3 \times (0, T)$$

$$p = P_{out}, \quad \text{sur } \Sigma_3 \times (0, T)$$

$$\mathbf{v}(x_1, H + u(x_1, t), t) = \left( 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) \right)^T,$$

$$\forall (x_1, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0^F$$

# Couplage fluide-structure

Trouver  $u$  le déplacement de la structure, la vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression  $p$  du fluide, tels que

$$\eta(x_1, t) = - \left( \sigma^F \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right)_{(x_1, H+u(x_1, t))} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, t) \right)^2}$$

où  $\sigma^F = -pI + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$  est le vecteur unitaire dans la direction  $x_2$ .

# Approximation

**Structure.** Décomposition modale  $u(x_1, t) = \sum_i q_i(t)\phi_i(x_1)$ .

- ▶ Dans notre cas (plaque 1d), les modes propres  $\phi_i(x_1)$  sont calculées analytiquement. Pour des géométries compliquées (coque, 3d), on détermine numériquement les valeurs propres généralisées des matrices de masse et de raideur.
- ▶ On utilise le schéma de Newmark pour approcher  $q_i(t)$  qui est la solution d'une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre.

**Fluide.**

- ▶ La méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{v}(\mathcal{A}_t(\hat{\mathbf{x}}), t), \quad \frac{D^{\mathcal{A}}\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

- ▶ Éléments finis. Schéma d'Euler implicite pour la dérivée en  $t$

# Stabilité et traitement de la dérivée en temps

## Dérivée à l'extérieur de l'intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^F} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t^F} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

Grandmont C., Maday Y., Guimet V. (1998),

Formaggia L., Nobile F. (1999),

Le Tallec P., Mouro J. (2001), Nobile F. (2001),

Quarteroni A., Formaggia L. (2003),

Formaggia L., Nobile F. (2004)

## Dérivée à l'intérieur de l'intégrale

$$\int_{\Omega_t^F} \frac{D^{\mathcal{A}} \mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w}(\cdot, t) \in \left( H^1(\Omega_t^F) \right)^2$$

Baffico L. (2005), Swim E.W., Seshaiyer P. (2006)

## D'autres approches

- ▶ **algorithme dite “staggered” (titubant),**  
Piperno S., Farhat C., Larrouturou B. (1995),  
Farhat C., Lesoinne M. (2000)
- ▶ **frontière immergée,**  
Peskin C.S. (1977, 2002)
- ▶ **level set (fonction de niveau),**  
Cottet G.-H., Maître E. (2006)
- ▶ **méthode de la particule,**  
Cottet G.-H. (2002),  
Idelsohn, Onate, Del Pin, Calvo (2006)

# Validation du schéma de résolution des équations Navier-Stokes dans un domaine en mouvement

Benchmark proposé dans F. Nobile, PhD, 2001, pp. 92-94.

Le domaine de référence est :  $(X, Y) \in [0, 1] \times [0, 6]$ .

L'application ALE :  $x = X$  et  $y = (1 - 0.4 \sin(\frac{2\pi t}{10}))(Y - 0.5) + 0.5$ .

La solution exacte :  $p = -(2V(x - 6)/(1 + 2Vt))^2$ ,

$v_1 = -2V(x - 6)/(1 + 2Vt)$ ,

$v_2 = 2V(y - 0.5)/(1 + 2Vt)$  où  $V = 0.2$ .

**Pour  $dt = 1/32$ , à l'instant  $t = 2$ , l'erreur  $L^2$  est :**

5.97431e - 06 pour la vitesse,

0.00978646 pour la pression,

0.000142107 pour les forces exercées à la frontière droite.

**Pour  $dt = 1/32$ , à l'instant  $t = 7$ , l'erreur  $L^2$  est :**

4.38349e - 06 pour la vitesse,

0.00157697 pour la pression,

0.000180705 pour les forces exercées à la frontière droite.

# Stratégies de couplage

**Point fixe** :  $\mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha) = \alpha$

Nobile (2001),

Formaggia L., Gerbeau J. F., Nobile F., Quarteroni A. (2001),

Deparis S., Fernandez M.A., Formaggia L. (2003) accélération

**Newton** :  $\mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha) - \alpha = 0$

Steindorf J., Matthies H.G. (2002) différences finies,

Gerbeau J. F., Vidrascu M. (2003) forme simplifiée de l'opérateur tangent,

Fernández M.A., Moubachir M. (2003, 2005), jacobien exact

**BFGS** :  $\inf \frac{1}{2} \|\alpha - \mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha)\|_2^2$

Murea C. (2004) différences finies,

Mbaye I. (2006) gradient analytique

**Décomposition du domaine** :

Deparis S., Discacciati M., Quarteroni A. (2004)

# Point fixe, Newton et BFGS

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\alpha)$$

- ▶ Point fixe

$$G(\alpha) = \alpha, \quad \alpha^{k+1} = G(\alpha^k)$$

- ▶ Newton

$$F(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha - G(\alpha) = 0, \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k - \left( \nabla F(\alpha^k)^T \right)^{-1} F(\alpha^k)$$

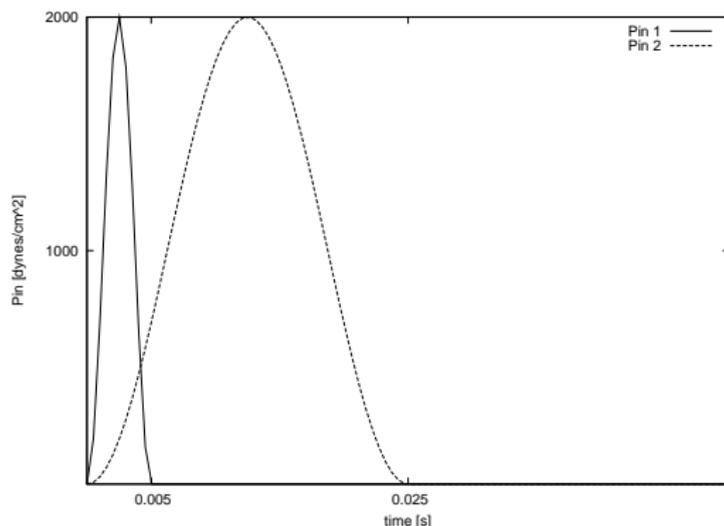
- ▶ BFGS

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}^m} J(\alpha) = \frac{1}{2} \|F(\alpha)\|^2, \quad \nabla J(\alpha) = (\nabla F(\alpha)) F(\alpha)$$

$$d^k = -H_k \nabla J(\alpha^k), \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k + \theta_k d^k$$

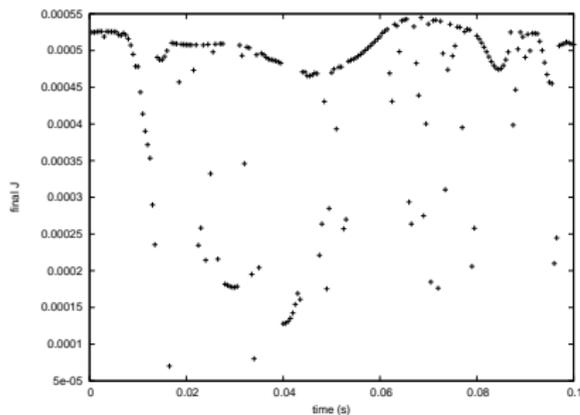
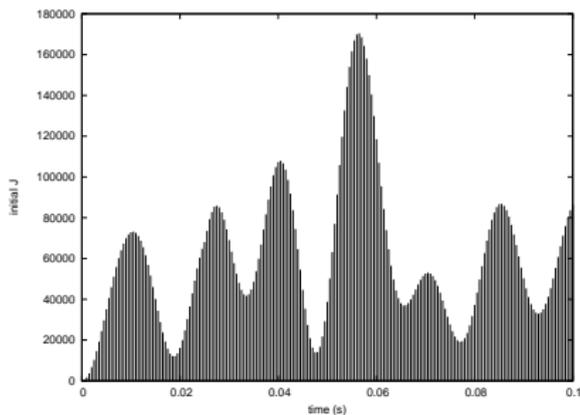
$$H_{k+1} = H_k + \left( 1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right) \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k}$$

# Pression à l'entrée

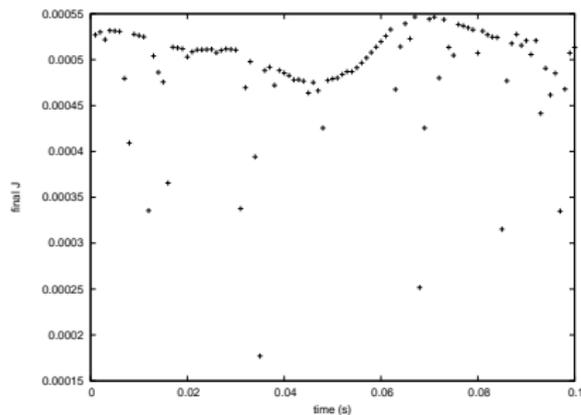
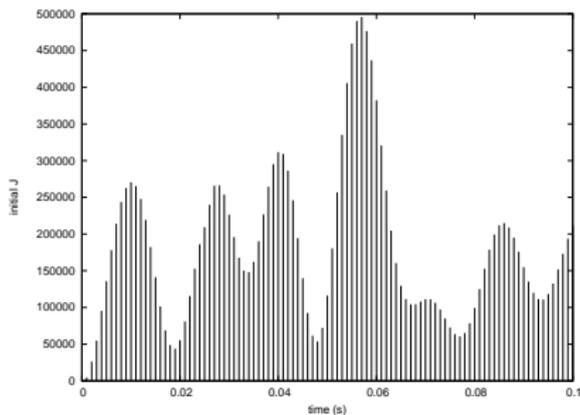


- 1) Module de Young  $E = 0.75 \cdot 10^6 \frac{g}{cm \cdot s^2}$ , temps final  $T = 0.25$  s
- 2) Module de Young  $E = 3 \cdot 10^6 \frac{g}{cm \cdot s^2}$ , temps final  $T = 0.1$  s

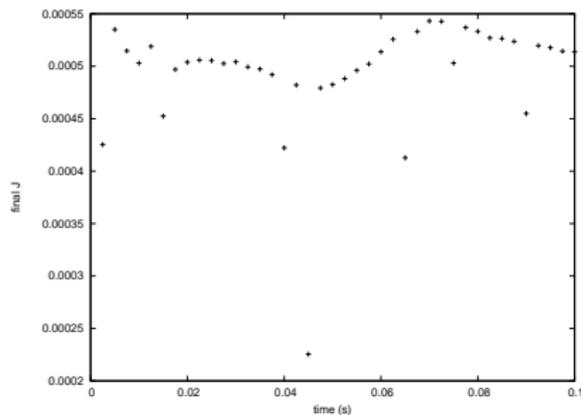
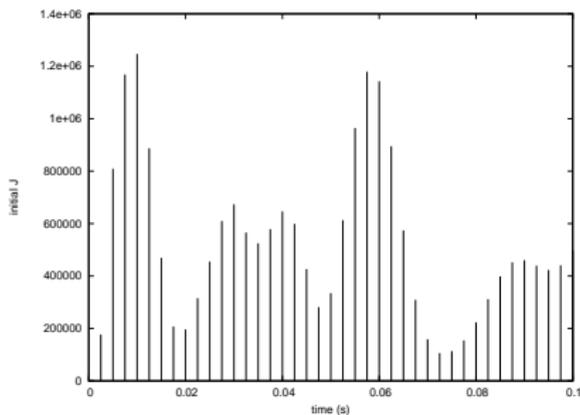
# Valeurs initiales (à gauche) et après l'optimisation (à droite) de la fonction coût pour $\Delta t = 0.0005$



# Valeurs initiales (à gauche) et après l'optimisation (à droite) de la fonction coût pour $\Delta t = 0.0010$

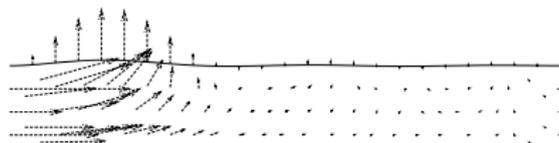


# Valeurs initiales (à gauche) et après l'optimisation (à droite) de la fonction coût pour $\Delta t = 0.0025$

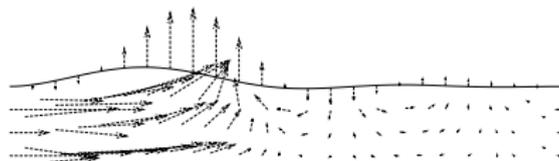


# Déplacement de la structure et la vitesse du fluide

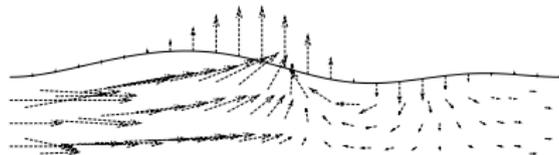
$t = 0.0150$



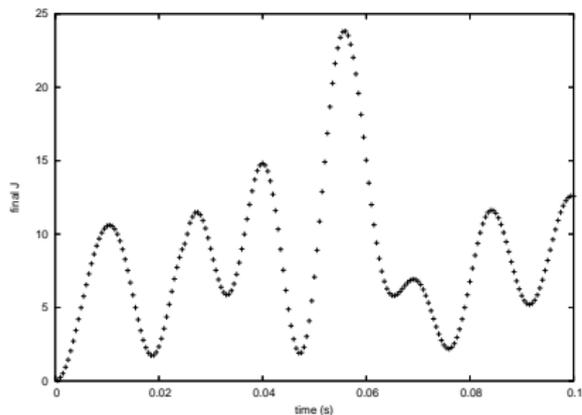
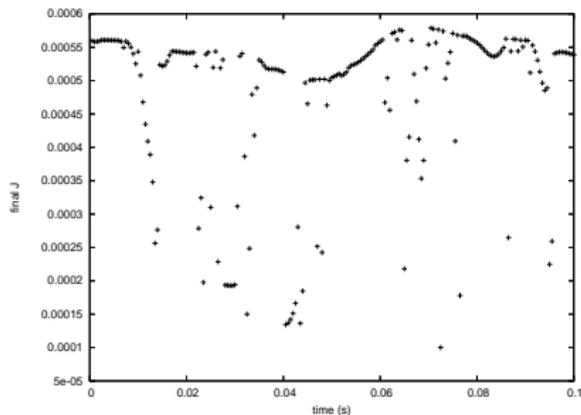
$t = 0.0300$



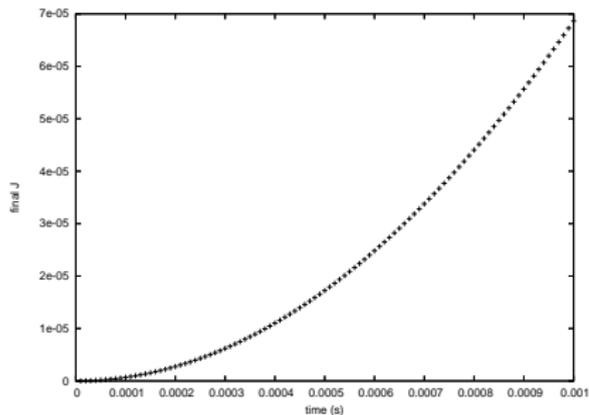
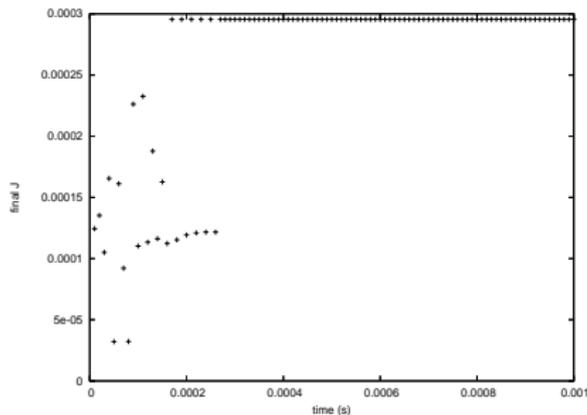
$t = 0.0450$



Valeurs finales de la fonction coût obtenues avec  
BFGS (à gauche) et Newton modifié (à droite) pour  
 $\Delta t = 0.0005$



Valeurs finales de la fonction coût obtenues avec  
BFGS (à gauche) et Newton modifié (à droite) pour  
 $\Delta t = 10^{-5}$



# Maillages dynamiques

**Problème :** On a un maillage du domaine à l'instant  $t$  et on connaît les déplacements des points qui se trouvent sur la frontière à l'instant  $t + \Delta t$ . On veut trouver un maillage pour le domaine à l'instant  $t + \Delta t$  qui garde les mêmes connexions et qui a le même nombre de points internes que le maillage précédent.

- ▶ **les arêtes sont remplacées par des ressorts.** Batina (1990)
- ▶ **le déplacement d'un point interne est la moyenne des déplacements des points qui se trouvent sur la frontière.** George (1991)
- ▶ **on minimise la déformation d'un corps élastique, extension harmonique.** Le Tallec, Gallice, Martin (1993)
- ▶ **application explicite.** Luo, Pedley (1996), Cai, Luo (2003)

$$\mathcal{A}_t(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left( \hat{x}_1, \frac{H + u(\hat{x}_1, t)}{H} \hat{x}_2 \right)^T$$

# Minimisation de l'énergie de déformations des ressorts

$J_i$  = l'ensemble des points voisins du point  $i$

$Int$  = l'ensemble des points internes du maillage

$Fr$  = l'ensemble des points frontière

$$J(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq NBV \\ (i \in Int) \vee (j \in Int)}} \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \right]$$

## Proposition (1998)

*Le problème d'optimisation a la solution :*

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\text{card}(J_i)} \sum_{j \in J_i} \bar{x}_j, \quad \forall i \in Int.$$

*Relations similaires pour  $\bar{y}_i$ ,  $\bar{z}_i$ .*

# Algorithme

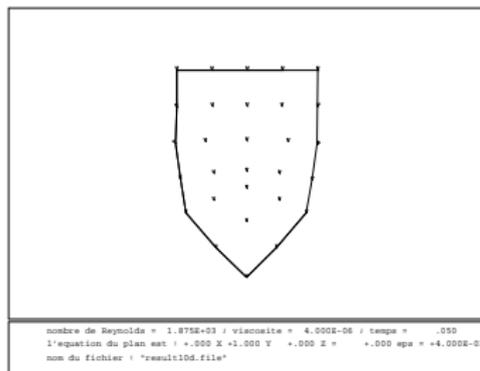
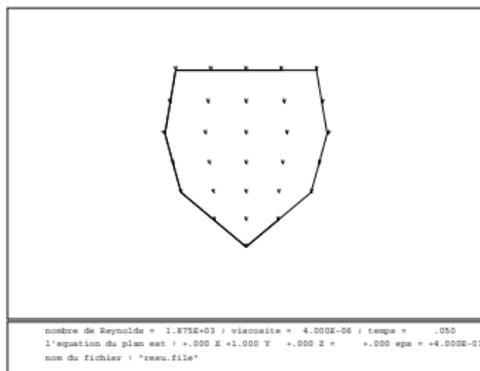
$(x_i^0, y_i^0, z_i^0)_{1 \leq i \leq NBV}$  les coordonnées initiales des points  
 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)_{i \in Fr}$  les coordonnées des points frontière

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega) x_i^k + \frac{\omega}{\text{card}(J_i)} \left( \sum_{j \in J_i \cap Int} x_j^k + \sum_{j \in J_i \cap Fr} \bar{x}_j \right)$$

## Théorème (1998)

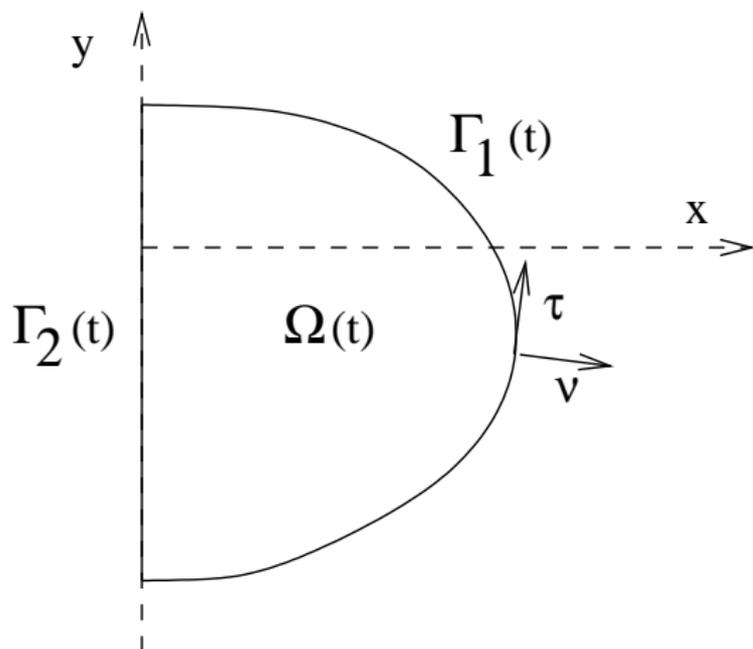
*Si  $\omega \in (0, 1]$ , alors l'algorithme converge vers la solution unique du problème d'optimisation  $\inf J$ .*

# Résultats numériques



3-4 itérations

# Simulation de la croissance biologique



## Problème à frontière libre

Trouver la vitesse  $\mathbf{v}(x, y, t) = (v_1(x, y, t), v_2(x, y, t)) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^2$   
et la pression du fluide  $p(x, y, t) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que

$$-\mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f} + \frac{\mu}{3} \nabla S, \quad \text{dans } \Omega(t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = S, \quad \text{dans } \Omega(t)$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1(t)$$

$$p = \gamma \kappa, \quad \text{sur } \Gamma_1(t)$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_2(t)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_2(t)$$

La vitesse de la frontière  $\Gamma_1(t)$  vérifie

$$V_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$$

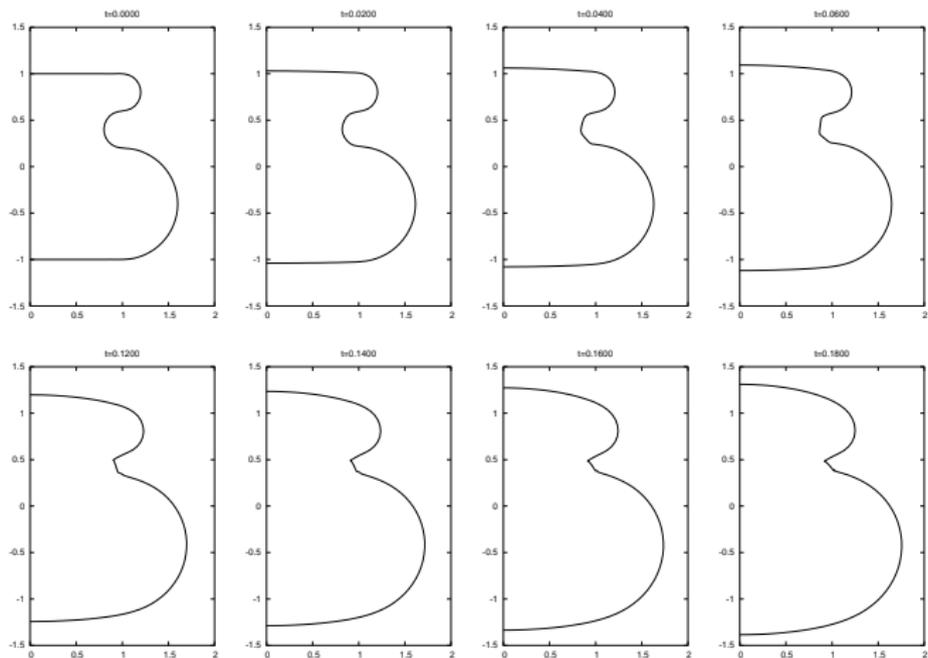
# Approximation

- ▶ spline cubiques pour la frontière
- ▶ la courbure et la normale dans un point sur la frontière sont calculées analytiquement
- ▶ éléments finis pour les fluides
- ▶ traitement de la condition “vitesse normale” par un multiplicateur de Lagrange
- ▶ algorithme explicite en temps

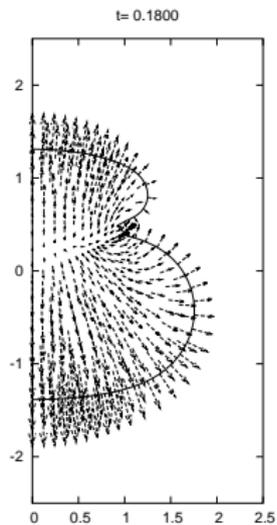
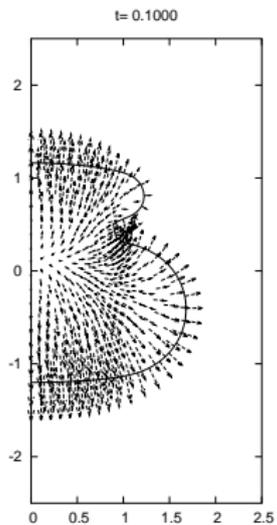
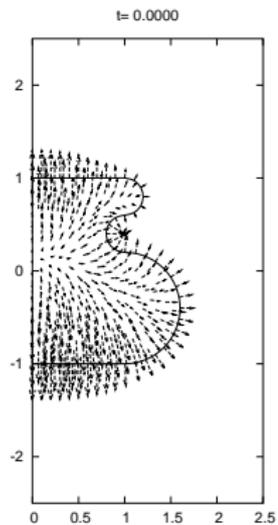
D'autres approches :

- ▶  $\theta - L$ , Hou T.Y., Lowengrub J.S., Shelley M.J. (1994)
- ▶ la frontière immergée, Peskin C.S.
- ▶ level set, Sethian J. A. (1996)
- ▶ méthode de la particule, Cottet G.-H. (2002, 2003)

# Évolution de la frontière



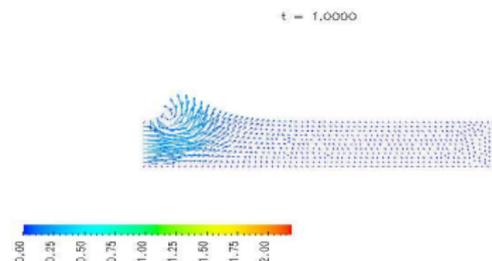
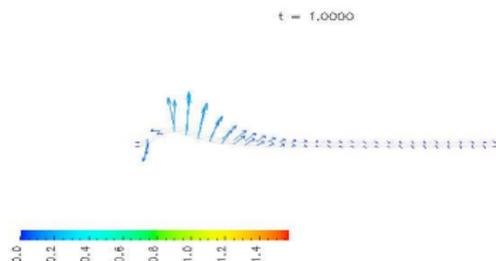
# Vitesse du fluide



Fernández, Gerbeau, Grandmont (2006), Nobile, Vergara (2007)

## Méthodes semi-implicites :

- ▶ calculer la position de l'interface d'une manière explicite;
- ▶ utiliser le même maillage pour le fluide pendant toutes les sous-itérations à l'instant de temps courant;



# Conclusions

- ▶ Quatre stratégies de type contrôle optimale pour l'interaction fluide-structure; contrôle et observation sur l'interface fluide-structure
- ▶ Différentiabilité et calcul analytique du gradient
- ▶ Nombre réduit de paramètres pour l'approximation du contrôle
- ▶ L'algorithme BFGS est moins sensible à l'initialisation; pas de temps moyen
- ▶ Maillage dynamique
- ▶ Écoulement à frontière libre avec des conditions aux limites dépendant de la courbure