

# FORMULATION HYBRIDE POUR UN PROBLÈME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

CORNEL MARIUS MUREA et JEAN-MARIE CROLET

In this paper, we present a variational formulation, which allows to solve in a decoupled way an interaction problem between an incompressible fluid and an elastic structure. An existence and uniqueness result is given. This variational formulation induces an algorithm which has given good results for a tridimensional problem (see Murea and Crolet [1995]).

## 1. INTRODUCTION

Dans ce papier on introduit un nouvel modèle mathématique pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique.

Dans la deuxième et la troisième section, on va rappeler quelques résultats dûs à J.L. Lions: le modèle classique, le modèle variationnel couplé et le théorème d'existence et d'unicité associé.

Dans la quatrième section, à partir du modèle couplé, on construit un nouveau modèle mathématique découplé en introduisant en plus une inconnue  $\lambda$ , qui a la signification d'une condition à la limite sur la surface de contact et qui permet le découplage du problème. On peut résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure, où chaque problème a  $\lambda$  comme contrôle frontière.

Le nouveau problème consiste à trouver  $\lambda$ , tel que la deuxième condition de couplage, c'est-à-dire l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact, soit vérifiée.

On donne des résultats d'existence et d'unicité pour ce modèle découplé.

En utilisant ce modèle, on a l'avantage suivant: puisque les problèmes du fluide et de la structure sont découplés, on peut utiliser les théories et les codes numériques déjà existants pour résoudre les deux problèmes séparément. En plus, on peut calculer les forces sur l'interface.

## 2. LE MODÈLE CLASSIQUE

Soient  $\Omega^F$  et  $\Omega^S$  deux ouverts bornés dans  $\mathbb{R}^N$ , où  $N = 2$  ou  $3$ , des frontières lipschitziennes, chacun situé localement d'un seul côté de sa frontière. On suppose que

$$\begin{aligned} \overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} &= \Gamma, \quad \partial\Omega^F = \Gamma, \quad \partial\Omega^S = \Gamma \cup \overline{\Sigma^1} \cup \Sigma^2, \\ \Gamma, \overline{\Sigma^1}, \Sigma^2 &\text{ disjointes,} \\ \Sigma^1 \text{ et } \Sigma^2 &\text{ sont deux variétés ouvertes en } \mathbb{R}^{N-1}, \\ \text{mes}(\Sigma^1) &> 0. \end{aligned}$$

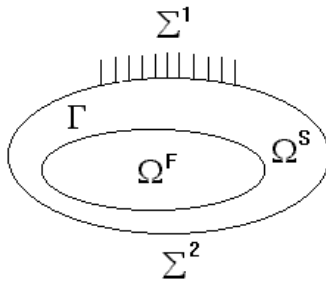


Figure 1: Configuration géométrique

Notons:

$\rho^F > 0, \rho^S > 0$ : les masses volumiques du fluide et de la structure,

$f^1, f^2$ : les densités volumiques de forces extérieures appliquées au fluide et à la structure sont de fonctions de  $\Omega^F \times ]0, T[$  dans  $\mathbb{R}^3$  et respectivement de  $\Omega^S \times ]0, T[$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$\mu^F > 0$ : le coefficient de viscosité dynamique du fluide,

$\mu^S > 0, \lambda^S \geq 0$ : les coefficients de Lamé de la structure,

$v_0^1$ : la vitesse initiale du fluide est une fonction de  $\Omega^F$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,

$u^0$ : le déplacement initial de la structure est une fonction de  $\Omega^S$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,

$v_0^2$ : la vitesse initiale de la structure est une fonction de  $\Omega^S$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,

$n^1$ : le vecteur normal à la surface  $\Gamma$  orienté du fluide vers la structure,

$n^2$ : le vecteur normal à la surface  $\Sigma^2$  orienté vers l'extérieur de la structure. Les vecteurs normaux sont définis presque partout sur les frontières, car les domaines sont lipschitziens. Une démonstration de ce résultat se peut trouver dans Nečas [1967].

On cherche à trouver:  $u$  le déplacement de la structure,  $v^1$  la vitesse du fluide,  $p$  la pression du fluide. Aussi, nous sommes intéressés par le calcul des forces sur l'interface fluide-structure.

Les principes fondamentaux de la physique permettent d'écrire notre problème sous la forme:

Trouver  $(u, v^1, p)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \overline{\Omega^S} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ \forall t \in ]0, T[, u(., t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^S}), \\ \forall (x, t) \in \Omega^S \times ]0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \\ \forall (x, t) \in \Omega^S \times ]0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \\ \\ v^1 : \overline{\Omega^F} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ \forall t \in ]0, T[, v^1(., t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^F}), \\ \forall (x, t) \in \Omega^F \times ]0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial v^1}{\partial t}(x, t), \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} p : \overline{\Omega^F} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \forall t \in ]0, T[, p(., t) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^F), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \frac{\partial v^1}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho^F} \Delta v^1 + \frac{1}{\rho^F} \mathbf{grad} p = \frac{1}{\rho^F} f^1 \quad \text{dans } \Omega^F \times ]0, T[, \\ \text{ii)} & \mathbf{div} v^1 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i^1}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans } \Omega^F \times ]0, T[, \\ \text{iii)} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^S} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho^S} f_i^2 \quad i = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times ]0, T[, \\ \text{iv)} & \sigma_{ij} = \lambda^S \left( \sum_{k=1}^N \epsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu^S \epsilon_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times ]0, T[, \\ \text{v)} & \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times ]0, T[, \end{array} \right.$$

les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{vi)} & v^1(., 0) = v_0^1(.) \quad \text{dans } \Omega^F, \\ \text{vii)} & u(., 0) = u^0(.) = 0 \quad \text{dans } \Omega^S, \\ \text{viii)} & \frac{\partial u}{\partial t}(., 0) = v_0^2(.) \quad \text{dans } \Omega^S, \end{array} \right.$$

les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ix)} \quad u = 0 \quad \text{sur } \overline{\Sigma^1} \times ]0, T[, \\ \text{x)} \quad \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j^2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^2 \times ]0, T[, \end{array} \right.$$

et les conditions de couplage

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{xi)} \quad v^1 = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[, \\ \text{xii)} \quad \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j^1 = \sum_{j=1}^N (-p \delta_{ij} + 2\mu^S \epsilon_{ij}(v^1)) n_j^1 \quad i = 1, \dots, N \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[. \end{array} \right.$$

### 3. UN MODÈLE VARIATIONNEL COUPLÉ

Après avoir explicité quelques notations, on va rappeler le problème variationnel et le théorème d'existence et d'unicité associé dû à J.L. Lions. On peut trouver ces résultats dans Lions [1969] et Dautray et Lions [1988].

On utilise les notations et les hypothèses de la section précédente. Lorsque l'on regarde les inconnues en présence, on constate une disparité entre la nature de deux inconnues:  $u$  le déplacement de la structure et  $v^1$  la vitesse du fluide. Il semble naturel d'opérer le changement de variable:

$$v^2 = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Par ailleurs, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t v^2(x, s) ds + u^0(x), \\ v^2(\cdot, t) &\in C^2(\overline{\Omega^S}), \\ v^2(x, \cdot) &\in C^1([0, T]), \\ \sigma_{ij}(u)(x, t) &= \sigma_{ij} \left( \int_0^t v^2(x, s) ds + u^0(x) \right). \end{aligned}$$

En plus, notons:

$$\begin{aligned} V^1 &= \{w^1 \in H^1(\Omega^F)^N, \quad \mathbf{div} w^1 = 0\} \\ V^2 &= \{w^2 \in H^1(\Omega^S)^N, \quad w^1 = 0 \text{ sur } \Sigma^1\} \\ V &= \{(w^1, w^2) \in V^1 \times V^2, \quad w^1 = w^2 \text{ sur } \Gamma\} \\ H &= L^2(\Omega^F)^N \times L^2(\Omega^S)^N \end{aligned}$$

où  $(\cdot, \cdot)_{k, \Omega}$  est le produit scalaire dans  $H^k(\Omega)$ .

La forme bilinéaire donnée par:

$$(1) \quad \begin{cases} a_F : H^1(\Omega^F)^N \times H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a_F(v^1, w^1) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^F} \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \frac{\partial w_i^1}{\partial x_j} dx \end{cases}$$

est continue, symétrique et coercive

$$a_F(v^1, v^1) + (v^1, v^1)_{0,\Omega^F} = (v^1, v^1)_{1,\Omega^F}.$$

La forme bilinéaire:

$$(2) \quad \begin{cases} a_S : V^2 \times V^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a_S(v^2, w^2) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^S} \sigma_{ij}(v^2) \epsilon_{ij}(w^2) dx \end{cases}$$

où  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  sont donnés par les relations  $iv)$  et  $v)$  de la section précédente, est continue, symétrique et  $V^2$ -elliptique. Voir par exemple Duvaut [1990].

On se donne:

$$\begin{array}{ll} f^1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^F)^N), & \\ f^2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^S)^N), & \\ \rho^S \in \mathbb{R}_+^* & \text{la masse volumique de la structure,} \\ \nu_{cin} = \frac{\mu^F}{\rho^F} \in \mathbb{R}_+^* & \text{la viscosité cinématique du fluide,} \\ u^0 \in V^2 & \text{le déplacement initial de la structure,} \\ (v_0^1, v_0^2) \in H & \text{les vitesses initiales.} \end{array}$$

On considère le problème variationnel suivant:

*Trouver  $(v^1, v^2)$  vérifiant*

$$(3) \quad \begin{cases} v^1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N), \\ v^2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N), \\ v^1 \in L^2(0, T; V^1), \\ \int_0^t v^2(s) ds \in L^\infty(0, T; V^2), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (v^1(t), w^1)_{0,\Omega^F} + \frac{d}{dt} (v^2(t), w^2)_{0,\Omega^S} + \nu_{cin} a_F(v^1(t), w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S \left( \int_0^t v^2(s) ds, w^2 \right) \\ & = (f^1(t), w^1)_{0,\Omega^F} + (f^2(t), w^2)_{0,\Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2), \\ & \forall (w^1, w^2) \in V \quad \text{au sens des distributions sur } ]0, T[ \end{aligned}$$

$$(5) \quad \int_0^t v^1(s) ds = \int_0^t v^2(s) ds \quad \text{sur } \Gamma \text{ presque partout } t,$$

$$(6) \quad (v^1(0), v^2(0)) = (v_0^1, v_0^2) \in H.$$

*Remarque.* La régularité  $L^\infty$  dans (3) peut sembler artificielle et en fait n'est pas indispensable pour l'énoncé du problème, mais l'existence et l'unicité sont démontrées pour l'ensemble des conditions (3).

*Remarque.* La condition de couplage sur  $\Gamma$  est  $v^1 = v^2$ , mais cela supposerait que  $v^2 \in V^2$  pour appliquer le théorème de trace et l'on sait seulement que  $\int_0^t v^2(s) ds \in V^2$ , d'où l'écriture de (5).

**THÉORÈME 1.** *Le problème (3)-(6) admet une solution unique.*

*Démonstration.* Voir Dautray et Lions [1988].

*Remarque.* Conformément à Lions [1969], l'existence reste valable même pour le cas où l'équation du mouvement du fluide est l'équation de Navier-Stokes, mais l'unicité est démontrée seulement dans le cas bidimensionnel.

## 4. FORMULATION VARIATIONNELLE HYBRIDE

A partir du modèle couplé précédent, on construit un nouveau modèle mathématique en introduisant en plus une inconnue  $\lambda$ , qui a la signification d'une condition limite sur la surface de contact et permet le découplage du problème. On peut alors résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure, où chaque problème a  $\lambda$  comme contrôle frontière.

Le nouveau problème consiste à trouver  $\lambda$ , tel que la deuxième condition de couplage, c'est-à-dire l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact, soit vérifiée.

En utilisant ce modèle, on a l'avantage suivant: puisque les problèmes du fluide et de la structure sont découplés, on peut utiliser les théories et les codes numériques déjà existants pour résoudre les deux problèmes séparément.

On utilise les mêmes notations que dans les sections précédentes.

Soient  $\gamma_\Gamma^1 : H^1(\Omega^F)^N \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$  et  $\gamma_\Gamma^2 : H^1(\Omega^S)^N \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$  les restrictions des applications trace sur  $\Gamma$ .

Notons  $M = H^{1/2}(\Gamma)^N$  et  $M'$  est l'espace dual de  $M$ .

Si  $f \in \mathcal{D}'(]0, T[; M')$  est une distribution vectorielle et  $g \in M$ , alors on peut définir une distribution scalaire  $[f, g]$  par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[), \quad [f, g](\phi) = \langle f(\phi), g \rangle_{M', M}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M', M}$  est le crochet de dualité  $M', M$ .

On considère le problème variationnel suivant:

*Trouver  $(v^1, v^2, \lambda)$  vérifiant*

$$(7) \quad \begin{cases} v^1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \cap L^2(0, T; V^1), \\ v^2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N), \quad \int_0^t v^2(s) ds \in L^\infty(0, T; V^2), \\ \lambda \in \mathcal{D}'(]0, T[; M'), \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (v^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F (v^1(t), w^1) = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} - [\lambda, \gamma_\Gamma^1(w^1)], \\ \forall w^1 \in V^1, \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(]0, T[) \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (v^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S \left( \int_0^t v^2(s) ds, w^2 \right) \\ = (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S (u^0, w^2) + [\lambda, \gamma_\Gamma^2(w^2)], \\ \forall w^2 \in V^2, \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(]0, T[) \end{cases}$$

$$(10) \quad \int_0^t v^1(s) ds = \int_0^t v^2(s) ds \quad \text{sur } \Gamma, \text{ presque partout sur } ]0, T[,$$

$$(11) \quad (v^1(0), v^2(0)) = (v_0^1, v_0^2).$$

*Remarque.* On observe que dans (8) et (9),  $\lambda$  a la signification d'un contrôle sur la surface de contact  $\Gamma$ . Donc, notre problème consiste à trouver  $\lambda$ , tel que  $v^1$  et  $v^2$ , données par (7), (8), (9) et (11), vérifient (10).

*Remarque.* Si on fait la somme des égalités (8) et (9), on obtient l'égalité (4). Par conséquence, on a le resultat suivant:

**PROPOSITION 1.** *Si  $(w^1, w^2, \lambda)$  est une solution du système (7)-(11), alors  $(w^1, w^2) = (v^1, v^2)$ , i.e.  $(w^1, w^2)$  est la solution unique du système (3)-(6).*

THÉORÈME 2. *Le problème (7)-(11) admet une solution unique.*

*Démonstration.* **Unicité:** Soient  $(w^1, w^2, \lambda^1)$  et  $(\bar{w}^1, \bar{w}^2, \lambda^2)$  deux solutions de (7)-(11). Selon la Proposition 1 et le Théorème 1 on a:

$$w^1 = \bar{w}^1 = v^1 \text{ et } w^2 = \bar{w}^2 = v^2$$

et en utilisant l'égalité (9), on obtient

$$[(\lambda^1 - \lambda^2), \gamma_\Gamma^2(w^2)] = 0, \forall w^2 \in V^2.$$

Puisque  $\gamma_\Gamma^2$  est surjective, on obtient

$$\forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[, (\lambda^1 - \lambda^2)(\phi) = 0, \text{ dans } M'$$

d'où  $\lambda^1 = \lambda^2$ .

**Existence:** Soit  $(v^1, v^2)$  la solution du modèle variationnel présenté dans Dautray et Lions [1988]. Alors

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (v^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F (v^1(t), w^1) - (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} \\ = -\frac{d}{dt} (v^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S \left( u^0 + \int_0^t v^2(s) ds, w^2 \right) + (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} \\ \forall (w^1, w^2) \in V^1 \times V^2, \text{ tel que } \gamma_\Gamma^1(w^1) = \gamma_\Gamma^2(w^2), \text{ au sens de } \mathcal{D}' ]0, T[ \end{cases}$$

Pour  $w^1$  dans  $V^1$  fixé, on observe que le membre droit de l'égalité (12) ne dépend pas en fait de  $w^2$ , mais il dépend seulement de la trace de  $w^2$  sur  $\Gamma$ . Cette constatation permet de construire la distribution vectorielle  $\lambda$  vérifiant (9). D'après les égalités (12) et (9) on obtient évidemment (8).

La construction de la distribution vectorielle  $\lambda$  se fait en trois étapes:

a) Pour chaque  $\phi \in \mathcal{D} ]0, T[$ , on construit l'application  $T_2(\phi)$  de  $V^2$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$T_2(\phi)(w^2) = - \int_0^T (v^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} \phi'(t) dt + \frac{1}{\rho^S} \int_0^T a_S \left( u^0 + \int_0^t v^2(s) ds, w^2 \right) \phi(t) dt - \int_0^T (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} \phi(t) dt, \forall w^2 \in V^2.$$

Si on note

$$C_2(\phi) = \int_0^T \|v^2(t)\|_{0, \Omega^S} |\phi'(t)| dt + \frac{1}{\rho^S} M_S \int_0^T \left\| u^0 + \int_0^t v^2(s) ds \right\|_{1, \Omega^S} |\phi(t)| dt + \int_0^T \|f^2(t)\|_{0, \Omega^S} |\phi(t)| dt$$



on obtient en utilisant l'inégalité Cauchy-Schwartz

$$(13) \quad \forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[ , \forall w^2 \in V^2, \quad |T_2(\phi)(w^2)| \leq C_2(\phi) \|w^2\|_{1, \Omega^S}.$$

On peut montrer facilement

$$\forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[ , T_2(\phi) \in (V^2)'$$

et en plus l'application  $T_2$  de  $\mathcal{D} ]0, T[$  dans  $(V^2)'$  est linéaire et continue dans le sens de distributions, donc

$$T_2 \in \mathcal{D}' \left( ]0, T[ ; (V^2)' \right).$$

D'une manière analogue, on peut construire  $T_1$  dans  $\mathcal{D}' \left( ]0, T[ ; (V^1)' \right)$ , tel que

$$\begin{aligned} \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 &= - \int_0^T (v^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} \phi'(t) dt \\ + \nu_{cin} \int_0^T a_F(v^1(t), w^1) \phi(t) dt &- \int_0^T (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} \phi(t) dt, \\ \forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[ , \forall w^1 \in V^1 \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  est le crochet de dualité entre  $(V^1)'$  et  $V^1$ .

D'après (12) on obtient

$$(14) \quad \forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[ , \forall w^1 \in V^1, \forall w^2 \in V^2, \gamma_\Gamma^1(w^1) = \gamma_\Gamma^2(w^2), \\ \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 + \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 = 0$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  est le crochet de dualité entre  $(V^2)'$  et  $V^2$ .

b) Pour chaque  $\phi$  dans  $\mathcal{D} ]0, T[$ , on peut définir

$$\begin{aligned} \lambda(\phi) : M &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda(\phi)(g) &= \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 \quad \text{où } \gamma_\Gamma^2(w^2) = g. \end{aligned}$$

D'abord, on démontre que  $\lambda(\phi)$  est bien définie. Soit  $g$  dans  $M$ . Alors il existe  $w^2$  dans  $V^2$ , tel que  $\gamma_\Gamma^2(w^2) = g$ . S'il existe encore un élément  $\bar{w}^2$  dans  $V^2$  tel que  $\gamma_\Gamma^2(\bar{w}^2) = g$ , alors d'après (14) on a

$$\langle T_2(\phi), \bar{w}^2 \rangle_2 = - \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 = \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2$$

donc  $\lambda(\phi)$  est bien définie.

L'application  $\lambda(\phi)$  est évidemment linéaire sur  $M$ .

On démontre maintenant que  $\lambda(\phi)$  est continue sur  $M$ .

D'après (13) on a

$$\begin{aligned} |\lambda(\phi)(g)| &= |\langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2| \leq C_2(\phi) \|w^2\|_{1, \Omega^S} \\ \forall \phi \in \mathcal{D} ]0, T[ , \forall w^2 \in V^2, \gamma_\Gamma^2(w^2) &= g \end{aligned}$$

d'où

$$(15) \quad |\lambda(\phi)(g)| \leq \left( \inf_{w^2 \in V^2, w^2|_{\Gamma}=g, w^2|_{\Sigma^1}=0} \|w^2\|_{1, \Omega^S} \right) C_2(\phi).$$

Puisque  $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Sigma^1} = \emptyset$ , alors les deux normes suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} i) \quad & g \in H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \|g\|_{1/2, \Gamma} \\ ii) \quad & g \in H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \inf_{w^2 \in V^2, w^2|_{\Gamma}=g, w^2|_{\Sigma^1}=0} \|w^2\|_{1, \Omega^S} \end{aligned}$$

donc

$$\lambda(\phi) \in M'.$$

c) On démontre maintenant que  $\lambda \in \mathcal{D}'(]0, T[; M')$ .

Puisque  $T_2$  est linéaire de  $\mathcal{D}(]0, T[)$  dans  $(V^2)'$ , alors  $\lambda$  est linéaire de  $\mathcal{D}(]0, T[)$  dans  $M'$ .

D'après (15), on a

$$\|\lambda(\phi)\|_{M'} \leq C_2(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

En tenant compte de la définition d'une distribution vectorielle,  $\lambda$  est continue, donc

$$\lambda \in \mathcal{D}'(]0, T[; M')$$

et en plus elle vérifie (9).

D'après (14), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \lambda(\phi), g \rangle_{M', M} &= \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 = - \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 \\ \forall w^1 \in V^1, \forall w^2 \in V^2, \gamma_{\Gamma}^1(w^1) &= \gamma_{\Gamma}^2(w^2) \end{aligned}$$

d'où (8).  $\square$

## 5. CONCLUSIONS

Le modèle mathématique pour la résolution découplée du problème fluide-structure présenté dans ce papier est bien posé et qui, par l'intermédiaire des différences finies pour la discrétisation en temps et des éléments finis mixtes-hybrides pour la discrétisation en espace, permettent l'écriture d'un algorithme de résolution d'implémentation relativement aisée fournissant le déplacement et la vitesse de la structure, la vitesse et la pression du fluide et les forces sur l'interface.

L'algorithme de résolution ainsi qu'un résultat de stabilité sont présentés dans Murea and Crolet [1995]. Les résultats numériques obtenus pour un problème tridimensionnel sont très satisfaisants.

## BIBLIOGRAPHIE

1. R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1988.
2. G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
3. J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites Non-linéaires*. Dunod, 1969.
4. C.M. Murea, *Modélisation mathématique et numérique d'un problème tridimensionnel d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1995.
5. C.M. Murea and J.-M. Crolet, *A stable algorithm for a fluid-structure interaction problem in 3D*. In: Contact Mechanics II - Computational Techniques, Ed. M.H. Aliabadi and C. Alessandri, Computational Mechanics Publication, Boston, 1995, pp 325-332.
6. J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations élliptiques*. Academia, Prague, 1967.

*Reçu le*

*Université de Bucarest  
Faculté de Mathématiques  
14, rue de l' Académie  
70109-Bucarest, Roumanie  
e-mail: murea@pro.math.unibuc.ro*

*et  
Université de Franche-Comté  
Laboratoire de Calcul Scientifique  
16, rue de Gray  
25030 Besançon Cedex, France  
e-mail: Jean-Marie.Crolet@univ-fcomte.fr*