

THÈSE

présenté à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE
FRANCHE-COMTÉ
en Mathématiques et Applications

Modélisation mathématique et numérique d'un
problème tridimensionnel d'interaction entre un
fluide incompressible et une structure élastique

Cornel Marius MUREA

Soutenue le 28 Juin 1995 devant la commission d'examen :

J.-M. CROLET	Professeur à l'Université de Franche-Comté, Directeur de thèse
Mme D. CIORANESCU	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, Rapporteur
J.M. THOMAS	Professeur à l'Université de Pau, Rapporteur
A. HALANAY	Professeur à l'Université de Bucarest, Examineur
F. HECHT	Directeur de recherche INRIA, Rocquencourt, Examineur
P. LESAIN	Professeur à l'Université de Franche-Comté, Président

À ma famille

Remerciements

Les résultats présentés dans cet ouvrage sont le fruit de recherches effectuées au sein du Laboratoire de Calcul Scientifique de Besançon, URA CNRS 741 et de la Faculté de Mathématiques de Bucarest. Ils ont été placés sous la direction scientifique de Monsieur Jean-Marie Crolet, Professeur à l'Université de Franche-Comté et celle de Monsieur Aristide Halanay, Professeur à l'Université de Bucarest.

Je tiens en tout premier lieu à leur exprimer ici ma gratitude pour avoir bien voulu accepter de diriger mes recherches, pour leur disponibilité à mon égard et pour leur nombreux conseils lors du déroulement de mes activités de recherches.

Je remercie Madame Doina Cioranescu, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'être rapporteur de ma thèse ainsi que m'avoir offert la chance d'effectuer des stages de recherche-formation dans le cadre du Projet Européen Commun TEMPUS-MATAROU 2797, financé par la Commission des Communautés Européennes. Je remercie Monsieur M. Iosifescu, Directeur de l'Institut de Statistiques de l'Académie Roumaine et Monsieur C. Duhamel, Attaché Scientifique à l'Ambassade de France à Bucarest, fortement impliqués dans l'élaboration des projets de mobilité universitaire.

Je remercie Monsieur Jean-Marie Thomas, Professeur à l'Université de Pau et Pays d'Ardour pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de juger ce travail en qualité de rapporteur et pour ses conseils scientifiques avertis.

Monsieur Pierre Lesaint, Professeur à l'Université de Franche-Comté m'a honoré en acceptant de présider le jury de ma thèse. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie Monsieur Frédéric Hecht, Directeur de recherche à l'INRIA, Rocquencourt pour les conseils judicieux qu'il m'a donné en informatique. Que son intérêt envers ce travail soit ici remercié.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Ph. Bénilan, Professeur à l'Université de Franche-Comté, Monsieur G. Dinca, Professeur à l'Université de Bucarest, Monsieur V. Preda, Professeur à l'Université de Bucarest, Monsieur D. Tiba de l'Académie Roumaine de Sciences, Bucarest pour avoir accepté de lire partiellement ce travail et m'avoir donné des conseils permettant ainsi d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

Je remercie de tout mon coeur Madame M. Diguglielmo, Secrétaire du Laboratoire de Calcul Scientifique de Besançon pour le soutien permanent et efficace qu'elle m'a apporté tant à mon arrivée en France que tout au long de mes séjours dans ce pays.

Il est difficile de remercier, en quelques lignes, tout les collègues et amis de Bucarest et de Besançon qui ont su être d'un précieux soutien tout au cours de ma présence parmi eux. Que chacun d'eux trouve ici un témoignage de la reconnaissance et de l'amitié que j'éprouve à leur égard.

Table des matières

Préface	3
1 Introduction	7
1.1 Modèle physique	7
1.2 Quelques exemples des problèmes d'interaction fluide structure	11
2 Modèles mathématiques pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique	17
2.1 Le modèle classique	18
2.2 Un modèle variationnel couplé	21
2.3 Un modèle variationnel pour la résolution découplée du problème d'interaction fluide incompressible structure élastique	26
2.4 Un modèle variationnel mixte	38
2.5 Bilan du chapitre	42
3 Etude de l'existence et de l'unicité pour la solution d'un problème parabolique avec multiplicateur de Lagrange	43
3.1 Problème de Stokes stationnaire	44
3.1.1 Formulation variationnelle classique	44
3.1.2 Formulation variationnelle mixte	45
3.2 Problème de Stokes évolutif	47
3.2.1 Formulation variationnelle classique	47
3.2.2 Formulation variationnelle mixte	48
3.3 Nouvelle formulation variationnelle mixte	52
3.3.1 Présentation	52
3.3.2 Théorème d'existence d'une solution	54
3.3.3 Critère supplémentaire, théorème d'unicité	58
3.4 Application: une formulation variationnelle mixte pour l'équation d'évolution correspondant au problème de Stokes	63

3.5	Annexe: quelques propriétés des opérateurs définis par blocs	64
4	Un problème semi-discrétisé en temps	69
4.1	Présentation d'un schéma semi-discrétisé en temps	70
4.2	Existence et unicité pour le problème semi-discrétisé en temps	73
4.3	Stabilité en temps du schéma semi-discrétisé	79
5	Discrétisation en espace, procédures numériques	87
5.1	Discrétisation en espace à l'aide d'éléments finis mixtes	88
5.1.1	Présentation du problème discret	88
5.1.2	Existence et unicité pour le problème discret	92
5.1.3	Choix d'éléments finis et construction des espaces de dimension finie	96
5.1.4	Construction de l'opérateur d'interpolation	101
5.1.5	Bilan de la section	111
5.2	Un algorithme de type Uzawa pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique	112
5.2.1	Présentation du problème	112
5.2.2	L'algorithme d'Uzawa	114
5.2.3	Résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique: présentation de l'algorithme, théorème de convergence	115
5.3	Stabilité en temps du schéma complètement discrétisé	122
6	Tests numériques	127
6.1	Caractéristiques physiques du problème	127
6.2	Résultats intermédiaires	133
6.3	Résultats finaux	147
	Bibliographie	163

Préface

Le travail présenté ici traite de l'interaction évolutive en temps entre un fluide incompressible et une structure élastique et s'attache à construire une modélisation mathématique rigoureuse qui conduit à une mise en oeuvre numérique efficace même dans le cas tridimensionnel. Le fluide est modélisé par l'équation évolutive de Stokes et la structure est supposée linéairement élastique.

Deux modèles mathématiques pour la résolution découplée du problème fluide structure sont présentés. Ces modèles sont bien posés et par l'intermédiaire des éléments finis mixtes pour la discrétisation en espace et des différences finies pour la discrétisation en temps permettent l'écriture d'un algorithme de résolution d'implémentation relativement aisée fournissant le déplacement de la structure, la vitesse d'écoulement et la pression du fluide. Les résultats numériques sont très satisfaisants.

Le premier chapitre est consacré au descriptif du problème physique issu de la biomécanique, aux difficultés de modélisation mathématique et aux hypothèses de travail. On s'intéresse à la modélisation du comportement mécanique du ventricule gauche du cœur considéré comme un ensemble fluide incompressible structure élastique épaisse.

Afin de découpler le problème d'interaction fluide structure, deux nouveaux modèles mathématiques sont introduits dans le second chapitre. Après avoir rappelé quelques résultats dûs à J.L. Lions, en particulier le modèle classique, le modèle variationnel couplé et les théorèmes d'existence et d'unicité associés, on construit un nouveau modèle mathématique découplé, en introduisant une inconnue λ , traduisant une condition à la limite sur la surface d'interaction fluide structure. Il est alors possible de résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure, chaque problème ayant λ comme contrôle frontière: il s'agit alors de trouver λ , tel que l'égalité des vitesses du

fluide et de la structure sur la surface d'interaction soit vérifiée. Ce modèle découplé, pour lequel on donne des résultats d'existence et d'unicité, a pour avantage d'utiliser des théories et des codes numériques déjà existants pour la résolution de chacun des problèmes. Notre objectif étant de travailler dans un cadre tridimensionnel, la condition d'incompressibilité du fluide est traitée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange qui a la signification physique d'une pression dans le fluide. Un problème mixte est ainsi obtenu.

Le troisième chapitre est une étude approfondie du problème du fluide obtenu après le découplage. Ce problème parabolique est une variante évolutive du problème stationnaire avec multiplicateur de Lagrange étudié dans Babuska [1971] et Brezzi [1974]. D'abord, on présente une formulation variationnelle mixte ayant comme inconnues la vitesse et la pression, puis l'existence et l'unicité de la solution sont prouvées.

Le quatrième chapitre décrit un schéma semi-discrétisé en temps associé au problème continu mixte introduit précédemment, pour lequel on montre successivement, qu'il est bien posé et qu'il est inconditionnellement stable en temps. Pour ce dernier point, on démontre la stabilité simultanément pour le fluide et pour la structure, les vitesses étant évaluées dans la norme de l'espace H^1 , ce qui est mieux que l'évaluation habituelle dans la norme de l'espace L^2 utilisée pour l'approximation de l'équation de Stokes.

Au début du cinquième chapitre, on présente l'élément fini mixte qui sera mis en oeuvre. L'existence et l'unicité de la solution du problème complètement discrétisé est prouvée en utilisant les résultats de Babuska [1971] et Brezzi [1974]. Un schéma numérique pour la résolution découplée du problème fluide structure est présenté. A chaque pas de temps, il faut résoudre un système linéaire symétrique, non défini positif. Dans une seconde étape, on présente un algorithme convergent pour la résolution de ce

système linéaire. Enfin, la stabilité en temps du schéma complètement discrétisé est démontrée.

Le dernier chapitre regroupe les résultats des simulations numériques effectuées. D'abord, les caractéristiques physiques d'un problème particulier sont présentées, puis la résolution numérique du problème au premier pas de temps. Les résultats intermédiaires montrent que l'algorithme modifie à chaque itération le contrôle λ , tel que la différence maximale entre les vitesses du fluide et de la structure sur la surface d'interaction diminue, jusqu'à l'obtention de l'égalité des vitesses sur cette surface d'interaction. Enfin, on présente les résultats relatifs à plusieurs pas de temps.

Chapitre 1

Introduction

Dans la première section, on présente le problème physique, les difficultés de modélisation mathématique et les hypothèses de travail.

Dans la deuxième section, on présente quelques exemples de problèmes d'interaction fluide structure dans les domaines de la biomécanique et de l'aérospatial.

1.1 Modèle physique

Le problème consiste à étudier l'écoulement tridimensionnel non stationnaire d'un fluide incompressible limité par une paroi élastique épaisse.

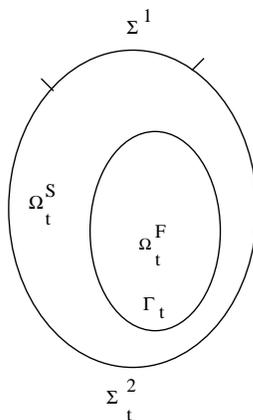


Figure 1

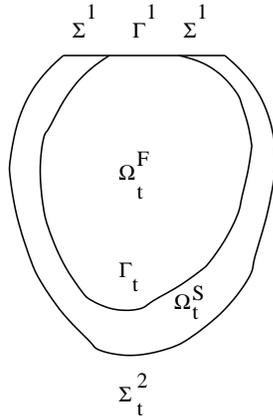


Figure 2

L'étude théorique du modèle de la figure 2 est plus difficile, car sur la frontière Γ^1 on impose des conditions aux limites de type Dirichlet.

On utilise les notations suivantes:

Ω_t^F est le domaine occupé par le fluide à l'instant t

Ω_t^S est le domaine occupé par la structure à l'instant t

Γ_t est la surface d'interaction

Σ^1 est la surface extérieure fixée

Σ_t^2 est la surface extérieure libre

f^1 représente les forces volumiques dans Ω_t^F

f^2 représente les forces volumiques dans Ω_t^S

On suppose que les forces extérieures sur Σ_t^2 sont nulles et que le fluide occupe toute la cavité intérieure de la structure. Dans ce cas, le domaine occupé par le fluide est uniquement déterminé par le déplacement de la structure.

Le problème est le suivant:

On connaît les données initiales:

u_0, ν_0 le déplacement et la vitesse de la structure,

v_0 la vitesse du fluide,

Ω_0^F, Ω_0^S les domaines initiaux.

On cherche à trouver:

$u : \Omega_0^S \times]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}^N$ le déplacement de la structure

et pour chaque $t \in]0, T[$

$v(., t) : \Omega_t^F \longrightarrow \mathbb{R}^N$ la vitesse du fluide,

$p(., t) : \Omega_t^F \longrightarrow \mathbb{R}$ la pression du fluide

On suppose que le fluide est gouverné par l'équation d'évolution de Stokes et pour la structure on se place dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire.

Connaissant le domaine initial, on utilise les coordonnées de Lagrange pour le déplacement de la structure, comme cela est le cas pour les problèmes usuels en élasticité.

Par contre, pour le fluide nous sommes intéressés par la vitesse et la pression à l'instant t sur Ω_t^F et donc nous utilisons les coordonnées d'Euler.

La difficulté est alors d'écrire un système d'équations utilisant simultanément les coordonnées de Lagrange et d'Euler.

L'utilisation des coordonnées de Lagrange pour les fluides incompressibles conduit à des équations fortement non linéaires. Pour cette raison, nous préférons la représentation en coordonnées d'Euler.

Une seconde difficulté est l'écriture du système d'équations pour le domaine Ω_t^F , qui est en mouvement.

Ces difficultés peuvent être surmontées en supposant le domaine Ω^F fixe pour

l'intervalle de temps $[0, T]$.

On utilise ces hypothèses pour écrire les modèles mathématiques.

On rappelle d'abord les systèmes de coordonnées de Lagrange et d'Euler utilisés dans l'étude d'un milieu continu.

Soit un milieu continu qui occupe à l'instant $t = 0$ une région Ω_0 de \mathbb{R}^3 et à l'instant $t > 0$ un région Ω_t .

On dit que l'on connaît le mouvement du milieu continu entre l'instant 0 et T si on connaît l'application

$$f : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

qui pour chaque t dans $[0, T]$ met en correspondance biunivoque Ω_0 et Ω_t , en d'autre termes, pour chaque t dans $[0, T]$, $f(\cdot, t)$ est l'application qui à tout point $X = (X_1, X_2, X_3)$ de Ω_0 fait correspondre un point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de Ω_t d'une manière bijective.

A partir de cette application, on peut construire la relation d'équivalence suivante:

Définition 1.1.1 Soient $x^1 \in \Omega_{t_1}$ et $x^2 \in \Omega_{t_2}$, où $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. On dira que les points x^1 et x^2 sont équivalents si et seulement si il existe $X \in \Omega_0$ tel que

$$f(X, t_1) = x^1 \text{ et } f(X, t_2) = x^2.$$

Les classes d'équivalence sont appelées les points matériels du milieu continu.

On peut représenter ces classes d'équivalence par le point d'une configuration particulière. Si on choisit pour cela la configuration Ω_0 , on dit alors qu'on utilise les coordonnées de Lagrange. Les coordonnées $x = f(X, t)$ du point matériel à l'instant t sont les coordonnées d'Euler.

Dans tous les exemples d'applications suivantes, la structure est représentée en coordonnées de Lagrange.

Pour le fluide, le choix des coordonnées est fait en fonction de la nature de l'application. Dans certains domaines de la biomécanique, on utilise les coordonnées d'Euler puisque on veut connaître les vitesses et les pressions dans Ω_t^F . La difficulté réside alors dans l'écriture du système d'équations pour les domaines en mouvement.

Dans le domaine de l'aérospatial, où l'intérêt est d'étudier d'abord les vibrations de la structure alors que le comportement du fluide reste secondaire, on peut utiliser les coordonnées de Lagrange.

1.2 Quelques exemples des problèmes d'interaction fluide structure

a) Dans Lions [1969, p. 120] et Dautray & Lions [1988, vol. 8, p. 795], une formulation variationnelle pour l'étude de l'écoulement du sang dans les veines. Les caractéristiques de ce modèle sont:

- les inconnues sont:
 - v la vitesse du fluide représentée en coordonnées d'Euler,
 - ν la vitesse de la structure représentée en coordonnées de Lagrange
- le domaine occupé par le fluide est fixe pour l'intervalle de temps $[0, T]$
- le fluide est gouverné par l'équation évolutive de Navier-Stokes ou de Stokes et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire
- si le fluide est gouverné par l'équation de Navier-Stokes, le problème admet une solution unique en 2D. En 3D il existe une solution pour le problème, mais on n'a pas l'unicité.
- si le fluide est gouverné par l'équation de Stokes, le problème admet une solution unique, indépendamment de la dimension de l'espace.

b) Dans Boujot [1975], [1984], [1987] sont décrits des modèles mathématiques pour l'étude des vibrations qui interviennent dans le domaine aérospatial.

Dans Boujot [1975] est présenté un modèle avec les caractéristiques suivantes:

- les inconnues sont:

Φ le potentiel du champ de vitesse du fluide,

P le champ de la pression du fluide,

u_S le déplacement de la structure

Toutes ces inconnues sont représentées en coordonnées de Lagrange.

- le fluide est compressible et gouverné par des équations linéaires et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire
- le problème variationnel est équivalent à un problème spectral
- la formulation variationnelle est bien adaptée à la résolution numérique par la méthode des éléments finis.

Dans Boujot [1984] est présenté un modèle avec les caractéristiques suivantes:

- les inconnues sont:

u_F le déplacement du fluide représenté en coordonnées de Lagrange,

u_S le déplacement de la structure représenté en coordonnées de Lagrange

- le fluide est supposé irrotationnel et gouverné par des équations linéaires et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire
- la formulation variationnelle de second ordre en temps admet une solution unique
- le problème peut être résolu numériquement en introduisant une méthode d'éléments finis pour la discrétisation d'espace et un schéma implicite en temps.

c) Dans Morand & Ohayon [1992] sont étudiés des modèles mathématiques pour les vibrations qui interviennent dans le domaine aérospatial.

A titre d'exemple d'applications, on peut citer l'étude des vibrations dans l'environnement acoustique des satellites et des charges vibratoires sur les équipements provenant du bruit des moteurs.

Le fluide est supposé irrotationnel et gouverné par des équations linéaires et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire.

Dans le chapitre 8 de cet ouvrage, plusieurs modèles sont présentés.

Un premier modèle a les caractéristiques suivantes:

- les inconnues sont:

p la pression du fluide représenté en coordonnées de Lagrange,

u_S le déplacement de la structure représenté en coordonnées de Lagrange

- la discrétisation par la méthode des éléments finis conduit à un problème spectral non symétrique.

Une façon de parvenir à une formulation variationnelle symétrique consiste à décrire le fluide au moyen du champ de déplacement u_F (représenté en coordonnées de Lagrange).

Une autre formulation variationnelle est obtenue en utilisant comme inconnues (ϕ, p, u_S) , où ϕ est le potentiel des déplacements du fluide.

La discrétisation par la méthode d'éléments finis conduit à un problème spectral symétrique.

d) Dans Errate, Esteban & Maday [1994] est présenté un modèle mathématique en dimension un pour un problème d'interaction fluide structure sous les hypothèses suivantes:

- les inconnues sont
 - v la vitesse du fluide représentée en coordonnées d'Euler,
 - p la pression du fluide représentée en coordonnées d'Euler,
 - u_S le déplacement de la structure représentée en coordonnées de Lagrange
- les équations du fluide sont écrites dans Ω_t^F qui est un domaine en mouvement
- le fluide est gouverné par l'équation de Navier-Stokes et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire
- le théorème de Schauder est utilisé pour prouver l'existence au moins d'une solution

e) Dans Crolet, Chahboune & Akeshbi [1994] et Chahboune [1994] est étudié un modèle mathématique du ventricule gauche du coeur sous les hypothèses suivantes:

- les inconnues sont
 - v la vitesse du fluide représentée en coordonnées d'Euler,
 - p la pression du fluide représentée en coordonnées d'Euler,
 - u_S le déplacement de la structure représentée en coordonnées de Lagrange
- le domaine occupé par le fluide est fixe pour un petit intervalle de temps
- le fluide est gouverné par l'équation de Navier-Stokes et la structure vérifie les équations de l'élasticité linéaire

La résolution numérique se fait d'une manière découplée: d'abord le problème de la structure est résolu avec une condition limite arbitraire sur la surface de contact fluide structure et puis le problème du fluide est résolu en connaissant les vitesses de la structure sur la surface de contact. Après le calcul des forces exercées par le fluide

sur la structure, l'algorithme passe à l'itération suivante en résolvant le problème de la structure avec les nouvelles conditions aux limites.

Conclusions

En utilisant les coordonnées de Lagrange pour le fluide, on a la possibilité d'écrire le système d'équations dans le domaine de géométrie fixe Ω_0^F .

Pour les fluides incompressibles, ces coordonnées conduisent à des équations fortement non-linéaires (voir Temam [1995]). A cause de cela, les coordonnées de Lagrange sont utilisées notamment pour les fluides compressibles, alors que pour les fluides incompressibles on utilise les coordonnées d'Euler; dans ce deuxième cas, la difficulté réside dans l'écriture des équations dans le domaine en mouvement Ω_t^F .

Nous sommes intéressés par les problèmes d'interaction fluide incompressible structure élastique.

La divergence nulle pour le fluide et l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact rendent difficile la résolution numérique de ce type de problème.

Dans les chapitres suivants, nous construisons deux modèles mathématiques découplés. Ces modèles sont bien posés et permettent l'écriture d'un schéma numérique ayant de bonnes propriétés:

- stabilité
- facilité d'implémentation
- résultats numériques très satisfaisants.

Chapitre 2

Modèles mathématiques pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique

Dans ce chapitre on introduit deux nouveaux modèles mathématiques pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique.

Dans les deux premières sections, on va rappeler quelques résultats dûs à J.L. Lions: le modèle classique, le modèle variationnel couplé et le théorème d'existence et d'unicité associé.

Dans la troisième section, à partir du modèle couplé, on construit un nouveau modèle mathématique découplé en introduisant en plus une inconnue λ , qui a la signification d'une condition à la limite sur la surface de contact et qui permet le découplage du problème. On peut résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure, où chaque problème a λ comme contrôle frontière.

Le nouveau problème consiste à trouver λ , tel que la deuxième condition de couplage, c'est-à-dire l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact, soit vérifiée.

On donne des résultats d'existence et d'unicité pour ce modèle découplé.

En utilisant ce modèle, on a l'avantage suivant: puisque les problèmes du fluide et de la structure sont découplés, on peut utiliser les théories et les codes numériques déjà existants pour résoudre les deux problèmes séparément.

Dans la quatrième section, à partir du modèle découplé, on construit un modèle mixte en introduisant en plus une inconnue p , qui a la signification physique d'une pression dans le fluide.

La contrainte de divergence nulle pour le fluide rend difficile la résolution numérique des problèmes présentés dans les sections deux et trois. L'utilisation de la méthode mixte pour traiter cette contrainte permet d'éviter la manipulation d'éléments finis à divergence nulle, ce qui est une tâche difficile surtout en 3D.

Le résultat d'existence et d'unicité pour le problème d'évolution mixte sera présenté dans le chapitre suivant.

On verra dans le quatrième chapitre que λ et p ont aussi la signification de multiplieurs de Lagrange pour les deux contraintes du problème: l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact et la divergence nulle pour le fluide.

2.1 Le modèle classique

Notons:

Ω^F, Ω^S deux ouverts bornés dans \mathbb{R}^N , où $N = 2$ ou 3 , des frontières lipschitziennes, chacun situé localement d'un seul côté de sa frontière. On suppose que

$$\begin{aligned} \overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} &= \Gamma, \quad \partial\Omega^F = \Gamma, \quad \partial\Omega^S = \Gamma \cup \overline{\Sigma^1} \cup \Sigma^2, \\ \Gamma, \overline{\Sigma^1}, \Sigma^2 &\text{ disjointes,} \\ \Sigma^1 \text{ et } \Sigma^2 &\text{ sont deux variétés ouvertes en } \mathbb{R}^{N-1} \\ \text{mes}(\Sigma^1) &> 0 \end{aligned}$$

$\rho^F > 0, \rho^S > 0$: les masses volumiques du fluide et de la structure

f^1, f^2 : les densités volumiques de forces extérieures appliquées au fluide et à la structure sont de fonctions de $\Omega^F \times]0, T[$ dans \mathbb{R}^3 et respectivement de $\Omega^S \times]0, T[$ dans \mathbb{R}^3

$\mu^F > 0$: le coefficient de viscosité dynamique du fluide

$\mu^S > 0, \lambda^S \geq 0$: les coefficients de Lamé de la structure

v^0 : la vitesse initiale du fluide est une fonction de Ω^F dans \mathbb{R}^N

u^0 : le déplacement initial de la structure est une fonction de Ω^S dans \mathbb{R}^N

ν^0 : la vitesse initiale de la structure est une fonction de Ω^S dans \mathbb{R}^N

n^1 : le vecteur normal à la surface Γ orienté du fluide vers la structure

n^2 : le vecteur normal à la surface Σ^2 orienté vers l'extérieur de la structure. Les vecteurs normaux sont définis presque partout sur les frontières, car les domaines sont lipschitziens. Une démonstration de ce résultat se peut trouver dans Nečas [1967, p. 88].

Les principes fondamentaux de la physique permettent d'écrire notre problème sous la forme **(P1)**:

Trouver (u, v, p) tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \overline{\Omega^S} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ \forall t \in]0, T[, u(., t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^S}) \\ \forall (x, t) \in \Omega^S \times [0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ \forall (x, t) \in \Omega^S \times]0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v : \overline{\Omega^F} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ \forall t \in]0, T[, v(., t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^F}) \\ \forall (x, t) \in \Omega^F \times]0, T[, \text{ il existe la dérivée partielle } \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} p : \overline{\Omega^F} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \forall t \in]0, T[, p(\cdot, t) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^F) \end{cases}$$

vérifiant:

$$\begin{cases} i) & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho^F} \Delta v + \frac{1}{\rho^F} \mathbf{grad} p = \frac{1}{\rho^F} f^1 & \text{dans } \Omega^F \times]0, T[\\ ii) & \mathbf{div} v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 & \text{dans } \Omega^F \times]0, T[\\ iii) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^S} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho^S} f_i^2 & i = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times]0, T[\\ iv) & \sigma_{ij} = \lambda^S \left(\sum_{k=1}^N \epsilon_{kk} \right) + 2\mu^S \epsilon_{ij} & i, j = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times]0, T[\\ v) & \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & i, j = 1, \dots, N \quad \text{dans } \Omega^S \times]0, T[\end{cases}$$

les conditions initiales

$$\begin{cases} vi) & v(\cdot, 0) = v^0(\cdot) & \text{dans } \Omega^F \\ vii) & u(\cdot, 0) = u^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega^S \\ viii) & \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = \nu^0(\cdot) & \text{dans } \Omega^S \end{cases}$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} ix) & u = 0 & \text{sur } \overline{\Sigma^1} \times]0, T[\\ x) & \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j^2 = 0 & \text{sur } \Sigma^2 \times]0, T[\end{cases}$$

et les conditions de couplage

$$\begin{cases} xi) & v = \frac{\partial u}{\partial t} & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ xii) & \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j^1 = \sum_{j=1}^N (-p \delta_{ij} + 2\mu^S \epsilon_{ij}(v)) n_j^1 \quad i = 1, \dots, N & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\end{cases}$$

Nouvelle formulation du problème classique

Lorsque l'on regarde les inconnues en présence, on constate une disparité entre la nature de deux inconnues: u le déplacement de la structure et v la vitesse du fluide.

Il semble naturel d'opérer le changement de variable:

$$\nu = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Par ailleurs, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \nu(x, s) ds + u^0(x) \\ \nu(\cdot, t) &\in C^2(\overline{\Omega^S}) \\ \nu(x, \cdot) &\in C^1([0, T]) \\ \sigma_{ij}(u)_{(x,t)} &= \sigma_{ij}\left(\int_0^t \nu(x, s) ds + u^0(x)\right) \end{aligned}$$

L'égalité $ix)$ s'écrit:

$$(2.1.1) \quad \nu = 0 \quad \text{sur } \Sigma^1 \times]0, T[$$

Remarque 2.1.1 Pour simplifier les notations, on va remplacer $\frac{p}{\rho^F}$, $\frac{f^1}{\rho^F}$, $\frac{f^2}{\rho^S}$ par respectivement p, f^1, f^2 . La relation $xii)$ devient

$$(2.1.2) \quad \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j^1 = \sum_{j=1}^N (-p \rho^F \delta_{ij} + 2\mu^S \epsilon_{ij}(v)) n_j^1$$

Remarque 2.1.2 On appelle **(P2)** ce nouveau problème.

Remarque 2.1.3 Les problèmes **(P1)** et **(P2)** sont équivalents.

2.2 Un modèle variationnel couplé

Après avoir explicité quelques notations, on va rappeler le problème variationnel et le théorème d'existence et d'unicité associé dû à J.L. Lions. On peut trouver ces résultats dans Lions [1969] et Dautray & Lions [1988, vol. 8, chap. XVIII, p. 795].

On utilise les notations et les hypothèses de la section précédente. En plus, notons:

$$\begin{aligned} V^1 &= \{w^1 \in H^1(\Omega^F)^N, \quad \mathbf{div} w^1 = 0\} \\ V^2 &= \{w^2 \in H^1(\Omega^S)^N, \quad w^1 = 0 \text{ sur } \Sigma^1\} \\ V &= \{(w^1, w^2) \in V^1 \times V^2, \quad w^1 = w^2 \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned}$$

$$H = L^2(\Omega^F)^N \times L^2(\Omega^S)^N$$

$(\cdot, \cdot)_{k,\Omega}$ est le produit scalaire dans $H^k(\Omega)$

La forme bilinéaire donnée par:

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} a_F : H^1(\Omega^F)^N \times H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ a_F(v, w^1) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^F} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i^1}{\partial x_j} dx \end{cases}$$

est continue, symétrique et coercive

$$a_F(v, v) + (v, v)_{0,\Omega^F} = (v, v)_{1,\Omega^F}$$

La forme bilinéaire:

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} a_S : V^2 \times V^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ a_S(\nu, w^2) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^S} \sigma_{ij}(\nu) \epsilon_{ij}(w^2) dx \end{cases}$$

où $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ sont donnés par les relations $iv)$ et $v)$ de la section précédente, est continue, symétrique et V^2 -elliptique. Voir par exemple Duvaut [1990, chap. 5 et 6].

On se donne:

$$\begin{array}{ll} f^1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^F)^N) & \\ f^2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^S)^N) & \\ \rho^S \in \mathbb{R}_+^* & \text{la masse volumique de la structure} \\ \nu_{cin} = \frac{\mu^F}{\rho^F} \in \mathbb{R}_+^* & \text{la viscosité cinématique du fluide} \\ u^0 \in V^2 & \text{le déplacement initial de la structure} \\ (v^0, \nu^0) \in H & \text{les vitesses initiales} \end{array}$$

On considère le problème variationnel **(P3)** suivant:

Trouver (v, ν) vérifiant:

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \\ \nu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N) \\ v \in L^2(0, T; V^1) \\ \int_0^t \nu(s) ds \in L^\infty(0, T; V^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(2.2.4) \quad & \frac{d}{dt}(v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \frac{d}{dt}(\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S\left(\int_0^t \nu(s) ds, w^2\right) \\
& = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2) \\
& \forall (w^1, w^2) \in V \quad \text{au sens des distributions sur }]0, T[
\end{aligned}$$

$$(2.2.5) \quad \int_0^t \nu(s) ds = \int_0^t v(s) ds \quad \text{sur } \Gamma \text{ presque partout } t$$

$$(2.2.6) \quad (v(0), \nu(0)) = (v^0, \nu^0) \in H$$

Remarque 2.2.1 La régularité L^∞ dans (2.2.3) peut sembler artificielle et en fait n'est pas indispensable pour l'énoncé du problème, mais l'existence et l'unicité sont démontrées pour l'ensemble des conditions (2.2.3).

Remarque 2.2.2 La condition de couplage sur Γ est $v = \nu$, mais cela supposerait que $\nu \in V^2$ pour appliquer le théorème de trace et l'on sait seulement que $\int_0^t \nu(s) ds \in V^2$, d'où l'écriture de (2.2.5).

Remarque 2.2.3 La condition (2.2.6) n'a en général pas de sens pour $(v, \nu) \in L^\infty(0, T; H)$. Elle est justifiée par le lemme ci-dessous:

Lemme 2.2.1 *Toute fonction satisfaisant (2.2.3)-(2.2.4) est, après modification sur un ensemble de mesure nulle, une fonction continue de $[0, T]$ dans V' .*

Démonstration: En identifiant H et son dual H' , on obtient

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

où V' est le dual de V .

En utilisant le théorème de Riesz et le fait que a_F et a_S sont continues, on peut construire deux fonctions g^1 et g^2 définies presque partout dans $]0, T[$ à valeurs dans $H^1(\Omega^F)^N$ et V^2 respectivement, données par

$$\begin{aligned} \forall w^1 \in H^1(\Omega^F)^N, \\ (g^1(t), w^1)_{1, \Omega^F} &= (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} - \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) \quad p.p. \ t \in]0, T[\\ \forall w^2 \in V^2, \\ (g^2(t), w^2)_{1, \Omega^S} &= (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0 + \int_0^t \nu(s) ds, w^2) \quad p.p. \ t \in]0, T[\end{aligned}$$

D'après les conditions (2.2.3) on a:

$$\begin{aligned} f^1 &\in L^2(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \\ f^2 &\in L^2(0, T; L^2(\Omega^S)^N) \\ v &\in L^2(0, T; V^1) \\ \int_0^t \nu(s) ds &\in L^\infty(0, T; V^2) \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$g^1 \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega^F)^N\right) \text{ et } g^2 \in L^2\left(0, T; V^2\right)$$

Soit l'application $g \in L^2(0, T; V')$ définie par

$$\langle g(\cdot), (w^1, w^2) \rangle_{V', V} = (g^1(\cdot), w^1)_{1, \Omega^F} + (g^2(\cdot), w^2)_{1, \Omega^S}$$

D'après (2.2.4), on a:

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(v(\cdot), w^1)_{0, \Omega^F} + \frac{d}{dt}(\nu(\cdot), w^2)_{0, \Omega^S} &= \langle g(\cdot), (w^1, w^2) \rangle_{V', V} \\ \forall (w^1, w^2) \in V &\text{ au sens des distributions sur }]0, T[\end{aligned}$$

Bien évidemment

$$(v, \nu) \in L^2(0, T; H) \subset L^2(0, T; V')$$

On utilise le résultat suivant qui se trouve dans Dautray & Lions [1988, chap. XIX, p. 838]:

Soit X un espace de Banach de dual X' et soient u et g deux fonctions de $L^1(a, b; X)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) u coïncide presque partout avec une primitive de g , c'est-à-dire il existe $\xi \in X$

et

$$(2.2.8) \quad u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \quad \xi \in X, \quad p.p.t \in [a, b]$$

ii) pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}([a, b])$

$$(2.2.9) \quad \int_a^b u(t)\phi'(t)dt = - \int_a^b g(t)\phi(t)dt$$

iii) pour chaque $\eta \in X'$

$$(2.2.10) \quad \frac{d}{dt}\langle u(\cdot), \eta \rangle = \langle g(\cdot), \eta \rangle \quad \text{dans } \mathcal{D}'([a, b])$$

Si l'une de ces conditions est satisfaite, alors u coïncide presque partout avec une fonction continue de $[a, b]$ dans X .

On va utiliser le point iii) en remplaçant X par V' , X' par $V'' = V$ car V est un Hilbert donc réflexif, u par (v, ν) et η par (w^1, w^2) . On obtient :

$$(v, \nu) \in \mathcal{C}^0(0, T; V')$$

ce qui donne un sens à la relation (2.2.6). \square

Remarque 2.2.4 Pour le problème de Stokes d'évolution, on a la régularité

$$v \in \mathcal{C}^0\left(0, T; L^2\left(\Omega^F\right)^N\right)$$

Pour le problème de la structure, il est démontré dans Lions [1968, chap. 3, p. 296] la relation

$$\nu \in \mathcal{C}^0\left(0, T; L^2\left(\Omega^S\right)^N\right)$$

Il est possible que, pour le problème fluide structure, on puisse obtenir

$$(v, \nu) \in \mathcal{C}^0(0, T; H)$$

Théorème 2.2.1 *Le problème (2.2.3)-(2.2.6) admet une solution unique.*

Démonstration: Voir Dautray & Lions [1988, chap. XIII, p. 798].

Remarque 2.2.5 Conformément à Lions [1969, p. 120], l'existence reste valable même pour le cas où l'équation du mouvement du fluide est l'équation de Navier-Stokes, mais l'unicité est démontrée seulement dans le cas bidimensionnel.

Remarque 2.2.6 Toute solution du problème **(P2)** est une solution du problème **(P3)**. Réciproquement, si **(P3)** admet une solution de classe C^1 , alors cette solution vérifie le problème **(P2)** de manière formelle. Pour plus de détails, voir Dautray & Lions [1988, chap. XIII, p. 798].

2.3 Un modèle variationnel pour la résolution dé-couplée du problème d'interaction fluide incompressible structure élastique

A partir du modèle couplé précédent, on construit un nouveau modèle mathématique en introduisant en plus une inconnue λ , qui a la signification d'une condition limite sur la surface de contact et permet le découplage du problème. On peut alors résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure, où chaque problème a λ comme contrôle frontière.

Le nouveau problème consiste à trouver λ , tel que la deuxième condition de couplage, c'est-à-dire l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact, soit vérifiée.

En utilisant ce modèle, on a l'avantage suivant: puisque les problèmes du fluide et de la structure sont découplés, on peut utiliser les théories et les codes numériques déjà existants pour résoudre les deux problèmes séparément.

On utilise les mêmes notations que dans les sections précédentes. En plus, notons :

$$M = H^{1/2}(\Gamma)^N$$

$$\gamma_0 : H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N \quad \text{est l'application trace}$$

$$\gamma_\Gamma : H^1(\Omega^S)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N \quad \text{est la restriction de l'application trace sur } \Gamma$$

On se donne

$$\begin{array}{ll} f^1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^F)^N) & \\ f^2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^S)^N) & \\ \rho^S \in \mathbb{R}_+^* & \text{la masse volumique de la structure} \\ \nu_{cin} \in \mathbb{R}_+^* & \text{la viscosité cinématique du fluide} \\ u^0 \in V^2 & \text{le déplacement initial} \\ (v^0, \nu^0) \in H & \text{les vitesses initiales} \end{array}$$

et on considère le problème variationnel **(P4)** suivant:

Trouver (v, ν, λ) vérifiant:

$$(2.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \\ \nu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N) \\ v \in L^2(0, T; V^1) \\ \int_0^t \nu(s) ds \in L^\infty(0, T; V^2) \\ \lambda \in L^2(0, T; M) \end{array} \right.$$

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \frac{d}{dt}(\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S\left(\int_0^t \nu(s) ds, w^2\right) \\ & \quad - (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ & = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2) \\ & \quad \forall (w^1, w^2) \in V^1 \times V^2 \quad \text{au sens des distributions sur }]0, T[\end{aligned}$$

$$(2.3.3) \quad \left(\gamma_0\left(\int_0^t v(s) ds\right) - \gamma_\Gamma\left(\int_0^t \nu(s) ds\right), \mu \right)_{1/2, \Gamma} = 0, \quad \forall \mu \in M, \quad p.p. \ t \text{ dans }]0, T[$$

$$(2.3.4) \quad (v(0), \nu(0)) = (v^0, \nu^0)$$

Remarque 2.3.1 Les quatre premières conditions de (2.3.1) sont identiques aux conditions de (2.2.3).

L'égalité (2.3.3) remplace la condition de continuité sur Γ qui est donnée de la relation (2.2.5).

La condition initiale (2.3.4) est identique à (2.2.6).

Remarque 2.3.2 On observe que w^1 et w^2 sont indépendantes, on ne demande plus d'avoir $w^1 = w^2$ sur Γ . Ce fait permet de découpler le problème fluide structure.

Prenant $w^2 = 0$ dans (2.3.2), on obtient

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) \\ &= (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + (\gamma_0(w^1), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ & \forall w^1 \in V^1 \quad \text{au sens des distributions sur }]0, T[\end{aligned}$$

Prenant $w^1 = 0$ dans (2.3.2), on obtient

$$(2.3.6) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S(\int_0^t \nu(s) ds, w^2) \\ &= (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2) - (\gamma_\Gamma(w^2), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ & \forall w^2 \in V^2 \quad \text{au sens des distributions sur }]0, T[\end{aligned}$$

Evidemment, on a l'équivalence entre l'égalité (2.3.2) et les égalités (2.3.5) et (2.3.6).

On observe que dans (2.3.5) et (2.3.6), λ a la signification d'un contrôle sur la surface de contact Γ . Donc, notre problème consiste à trouver λ , tel que v et ν , données par (2.3.5), (2.3.6) et (2.3.4), vérifient (2.3.3).

Proposition 2.3.1 *Si (v, ν, λ) est une solution du système (2.3.1)-(2.3.4), alors (v, ν) est une solution du système (2.2.3)-(2.2.6).*

Démonstration: Si (v, ν, λ) est une solution du système (2.3.1)-(2.3.4), alors (2.2.3) et (2.2.6) sont vérifiées évidemment.

Prenant $\gamma_\Gamma(w^1) = \gamma_0(w^2)$ dans (2.3.2), on obtient la relation (2.2.4).

La relation (2.3.3) implique (2.2.5) parce que

$$\forall q \in H^{1/2}(\Gamma)^N, (a, q)_{1/2, \Gamma} = 0 \iff a = 0$$

d'où la conclusion de cette proposition. \square

Théorème 2.3.1 *Si le problème (2.3.1)-(2.3.4) admet une solution, alors elle est unique.*

Démonstration: Soit (v^i, ν^i, λ^i) $i = 1, 2$ deux solutions de (2.3.1)-(2.3.4). Selon la proposition 2.3.1 et le théorème 2.2.1 on a:

$$v^1 = v^2 \text{ et } \nu^1 = \nu^2$$

Soit $\lambda^1 - \lambda^2 = \lambda^*$. on obtient

$$\forall w^1 \in V^1, \forall w^2 \in V^2, \left(\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda^*(\cdot) \right)_{1/2, \Gamma} = 0 \quad \text{p. p. dans }]0, T[$$

Prenant $w^1 = 0$, on obtient

$$(2.3.7) \quad \forall w^2 \in V^2, \left(\gamma_\Gamma(w^2), \lambda^*(\cdot) \right)_{1/2, \Gamma} = 0 \quad \text{p. p. dans }]0, T[$$

Puisque $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Sigma}^1 = \emptyset$, alors l'application

$$\gamma_\Gamma : V^2 \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$$

est surjective.

Ce résultat est basé sur le fait que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Gamma})$, on peut trouver $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}^S)$, tel que $\psi|_\Gamma = \phi$ et $\psi|_{\Sigma^1} = 0$. Ce fait est cité dans Dautray & Lions [1988, vol. 4, p. 1241]. En plus, $\mathcal{D}(\bar{\Gamma})$ est dense dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Ce résultat se peut trouver dans Dautray & Lions [1988, vol. 3, chap IV, p. 944].

La surjectivité reste valable même pour la situation quand $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Sigma^1} \neq \emptyset$ et seulement une partie de la frontière du fluide est en contact avec la structure, mais dans ce cas, il faut remplacer l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ par l'espace

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \left\{ v \in L^2(\Gamma); \exists w \in H^1(\Omega^S), w|_{\Gamma} = v, w|_{\Sigma^1} = 0 \right\}$$

muni de la norme quotient

$$\|v\| = \inf_{w \in H^1(\Omega^S), w|_{\Gamma} = v, w|_{\Sigma^1} = 0} \|w\|_{1, \Omega^S}$$

Pour plus de détails, voir Dautray & Lions [1988, vol. 4, chap VII].

D'après (2.3.7), on obtient $\lambda^* = 0$. \square

Avant de démontrer l'existence d'une solution pour le problème (2.3.1) – (2.3.4), on rappelle la notion des distributions vectorielles à valeurs dans un espace de Banach, puis on présente quelques normes sur $H^{1/2}(\Gamma)$.

Soit $\mathcal{D}(]0, T[)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $]0, T[$, à valeurs réelles, à support compact dans $]0, T[$. On peut munir cet espace vectoriel de la pseudo-topologie suivante:

Définition 2.3.1 *La suite $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ converge vers ϕ si et seulement si*

- 1) *les ϕ_n ont leur support dans un compact fixe de $]0, T[$, $\forall n \geq 0$*
- 2) *les $(\phi_n - \phi) \rightarrow 0$ uniformément sur $]0, T[$, ainsi que chacune de leurs dérivées.*

Soit X un espace de Banach et X' son dual.

Définition 2.3.2 *Une application linéaire T de $\mathcal{D}(]0, T[)$ dans \mathbb{R} est continue si et seulement si pour chaque suite $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ qui converge vers ϕ dans le sens de la définition 2.3.1, on a*

$$T(\phi_n) \rightarrow T(\phi) \text{ dans } \mathbb{R}$$

Définition 2.3.3 On appelle *distribution à valeurs dans X* , toutes les applications linéaires et continues de $\mathcal{D}]0, T[$ dans X . L'espace des distributions à valeurs dans X est noté

$$\mathcal{D}']0, T[; X$$

Dans le cas où X est \mathbb{R} , on utilise la notation

$$\mathcal{D}']0, T[$$

et on dit qu'il s'agit des *distributions scalaires*.

Si $f \in \mathcal{D}']0, T[; X'$ et $g \in X$, alors on peut définir une distribution scalaire $[f, g]$ par:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}]0, T[, \quad [f, g](\phi) = \langle f(\phi), g \rangle_{X', X}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ est le crochet de dualité X', X .

Maintenant, on rappelle quelques normes sur $H^{1/2}(\Gamma)$.

Sous les hypothèses concernant Ω^F , Ω^S , Γ et Σ^1 du début de ce chapitre, on peut parler de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. On peut munir cet espace de plusieurs normes:

1) Dans Dautray & Lions [1988, chap. IV, p. 943] il est présenté une norme définie par des cartes locales et une partition de l'unité sur Γ . On a le résultat suivant: les différentes normes définies par des cartes locales et une partition de l'unité sont équivalentes et sont des normes de Banach.

2) Dans Grisvard [1985, p. 20] il est présenté la norme

$$(2.3.8) \quad \|g\|_{1/2, \Gamma} = \left\{ \int_{\Gamma} |g|^2 d\sigma + \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^N} d\sigma(x) d\sigma(y) \right\}^{1/2}$$

qui est équivalente aux normes du point 1).

3) Puisque Ω^F est lipschitzien, il existe l'application trace

$$\gamma_0 : \left(H^1(\Omega^F), \|\cdot\|_{1,\Omega^F} \right) \rightarrow \left(H^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{1/2,\Gamma} \right)$$

qui est linéaire, continue et surjective.

Par des moyennes algébriques, on peut construire l'espace quotient

$$H^1(\Omega^F) / H_0^1(\Omega^F)$$

car $H_0^1(\Omega^F)$ est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega^F)$. Notons \hat{w} la classe d'équivalence de représentant w . On a

$$\forall u, v \in \hat{w}, \gamma_0(u) = \gamma_0(v)$$

On peut munir l'espace quotient de la norme

$$\|\hat{w}\|_* = \inf_{w \in \hat{w}} \|w\|_{1,\Omega^F}$$

qui est une norme de Banach.

On peut construire l'application

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_0 : \left(H^1(\Omega^F) / H_0^1(\Omega^F), \|\cdot\|_* \right) &\rightarrow \left(H^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{1/2,\Gamma} \right) \\ \hat{\gamma}_0(\hat{w}) &= \gamma_0(w) \text{ où } w \text{ est un représentant de } \hat{w} \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme continu.

Grâce au théorème de Banach (voir Brezis [1983, p. 19]), $\hat{\gamma}_0^{-1}$ est continue, donc la norme $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ est équivalente à la norme sur $H^{1/2}(\Gamma)$

$$(2.3.9) \quad \|g\|_* = \inf_{w \in H^1(\Omega^F), \gamma_0(w)=g} \|w\|_{1,\Omega^F}$$

4) D'une manière analogue, on peut construire

$$(2.3.10) \quad \|g\|_{**} = \inf_{w \in H^1(\Omega^S), w|_{\Gamma}=g, w|_{\Sigma^1}=0} \|w\|_{1,\Omega^S}$$

Si $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Sigma}^1 = \emptyset$, alors les normes $\|\cdot\|_{**}$, $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ sont équivalentes.

Proposition 2.3.2 Si (v, ν) est la solution du système (2.2.3) – (2.2.6), alors il existe une unique distribution vectorielle

$$\lambda \in \mathcal{D}' (]0, T[; M') \text{ où } M = \left(H^{1/2}(\Gamma) \right)^N$$

telle que

$$(2.3.11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F (v(t), w^1) \\ = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} - [\lambda, \gamma_0(w^1)] \\ \forall w^1 \in V^1, \text{ au sens de } \mathcal{D}' (]0, T[) \end{cases}$$

$$(2.3.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho_S} a_S \left(u^0 + \int_0^t \nu(s) ds, w^2 \right) \\ = (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} + [\lambda, \gamma_\Gamma(w^2)] \\ \forall w^2 \in V^2, \text{ au sens de } \mathcal{D}' (]0, T[) \end{cases}$$

Démonstration:

Unicité : Soient λ^1 et λ^2 deux distributions qui vérifient (2.3.12). Alors

$$[(\lambda^1 - \lambda^2), \gamma_\Gamma(w^2)] = 0, \forall w^2 \in V^2$$

Puisque γ_Γ est surjective, on obtient

$$\forall \phi \in \mathcal{D} (]0, T[), (\lambda^1 - \lambda^2)(\phi) = 0, \text{ dans } M'$$

d'où $\lambda^1 = \lambda^2$.

Existence : La démonstration de l'existence se fait en trois étapes:

a) Construction de deux distributions

$$\begin{aligned} T_1 &\in \mathcal{D}' \left(]0, T[; (V^1)' \right) \\ T_2 &\in \mathcal{D}' \left(]0, T[; (V^2)' \right) \end{aligned}$$

à partir desquelles on peut construire la distribution λ

b) Pour chaque $\phi \in \mathcal{D} (]0, T[)$, on construit l'application $\lambda(\phi) \in M'$

c) On démontre que

$$\lambda \in \mathcal{D}']0, T[; M')$$

a) Pour chaque $\phi \in \mathcal{D}]0, T[$, on construit l'application $T_2(\phi)$ de V^2 dans \mathbb{R} , définie par

$$\begin{aligned} T_2(\phi)(w^2) &= - \int_0^T (\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} \phi'(t) dt \\ &+ \frac{1}{\rho^S} \int_0^T a_S \left(u^0 + \int_0^t \nu(s) ds, w^2 \right) \phi(t) dt - \int_0^T (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} \phi(t) dt \\ &\quad \forall w^2 \in V^2 \end{aligned}$$

Puisque a_S est linéaire, alors pour chaque $\phi \in \mathcal{D}]0, T[$, $T_2(\phi)$ est linéaire sur V^2 .

On démontre maintenant qu'elle est aussi continue sur V^2 .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} |T_2(\phi)(w^2)| &\leq \int_0^T \|\nu(t)\|_{0, \Omega^S} \|w^2\|_{0, \Omega^S} |\phi'(t)| dt \\ &+ \frac{1}{\rho^S} M_S \int_0^T \left\| u^0 + \int_0^t \nu(s) ds \right\|_{1, \Omega^S} \|w^2\|_{1, \Omega^S} |\phi(t)| dt \\ &\quad + \int_0^T \|f^2(t)\|_{0, \Omega^S} \|w^2\|_{0, \Omega^S} |\phi(t)| dt \end{aligned}$$

où $a_S(x, y) \leq M_S \|x\|_{1, \Omega^S} \|y\|_{1, \Omega^S}$ pour chaque x, y dans V^2 .

Si on note

$$\begin{aligned} C_2(\phi) &= \int_0^T \|\nu(t)\|_{0, \Omega^S} |\phi'(t)| dt \\ &+ \frac{1}{\rho^S} M_S \int_0^T \left\| u^0 + \int_0^t \nu(s) ds \right\|_{1, \Omega^S} |\phi(t)| dt \\ &\quad + \int_0^T \|f^2(t)\|_{0, \Omega^S} |\phi(t)| dt \end{aligned}$$

on obtient

$$(2.3.13) \quad |T_2(\phi)(w^2)| \leq C_2(\phi) \|w^2\|_{1, \Omega^S} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}]0, T[, \forall w^2 \in V^2$$

Donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}]0, T[, T_2(\phi) \in (V^2)'$$

On note dans la suite $T_2(\phi)(w^2)$ par $\langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est le crochet de dualité entre $(V^2)'$ et V^2 .

D'après (2.3.13) on a

$$(2.3.14) \quad \|T_2(\phi)\|_{(V^2)'} \leq C_2(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$$

Puisque

$$\forall w^2 \in V^2, \langle T_2(\phi + \psi), w^2 \rangle_2 = \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 + \langle T_2(\psi), w^2 \rangle_2$$

alors T_2 est linéaire de $\mathcal{D}(]0, T[)$ dans $(V^2)'$.

En tenant compte de (2.3.14) et de la définition 2.3.2, T_2 est continue, donc

$$T_2 \in \mathcal{D}'(]0, T[; (V^2)')$$

D'une manière analogue, on peut construire T_1 dans $\mathcal{D}'(]0, T[; (V^1)')$, tel que

$$\begin{aligned} \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 &= - \int_0^T (v(t), w^1)_{0, \Omega^F} \phi'(t) dt \\ + \nu_{cin} \int_0^T a_F(v(t), w^1) \phi(t) dt - \int_0^T (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} \phi(t) dt \\ &\forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[), \forall w^1 \in V^1 \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ est le crochet de dualité entre $(V^1)'$ et V^1 .

D'après (2.2.4) on obtient

$$(2.3.15) \quad \begin{aligned} &\forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[), \\ &\forall w^1 \in V^1, \forall w^2 \in V^2, \gamma_0(w^1) = \gamma_T(w^2) \\ &\langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 + \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 = 0 \end{aligned}$$

b) Pour chaque ϕ dans $\mathcal{D}(]0, T[)$, on peut définir

$$\begin{aligned} &\lambda(\phi) : M \rightarrow \mathbb{R} \\ &\lambda(\phi)(g) = \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 \quad \text{où } \gamma_T(w^2) = g \end{aligned}$$

D'abord, on démontre que $\lambda(\phi)$ est bien définie. Soit g dans M . Alors il existe w^2 dans V^2 , tel que $\gamma_\Gamma(w^2) = g$. S'il existe encore un élément \bar{w}^2 dans V^2 tel que $\gamma_\Gamma(\bar{w}^2) = g$, alors d'après (2.3.15) on a

$$\langle T_2(\phi), \bar{w}^2 \rangle_2 = -\langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 = \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2$$

donc $\lambda(\phi)$ est bien définie.

On démontre maintenant que $\lambda(\phi)$ est linéaire sur M .

Soient g_1 et g_2 dans M . Alors il existe w_1^2, w_2^2 dans V^2 , tels que

$$\gamma_\Gamma(w_1^2) = g_1 \quad \gamma_\Gamma(w_2^2) = g_2$$

Puisque γ_Γ est linéaire, on a pour chaque α_1, α_2 dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \lambda(\phi)(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) &= \langle T_2(\phi), \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2 \rangle_2 \\ &= \alpha_1 \langle T_2(\phi), w_1^2 \rangle_2 + \alpha_2 \langle T_2(\phi), w_2^2 \rangle_2 \\ &= \alpha_1 \lambda(\phi)(g_1) + \alpha_2 \lambda(\phi)(g_2) \end{aligned}$$

Donc, $\lambda(\phi)$ est linéaire sur M .

On démontre maintenant que $\lambda(\phi)$ est continue sur M .

D'après (2.3.13) on a

$$\begin{aligned} |\lambda(\phi)(g)| &= \left| \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 \right| \leq C_2(\phi) \|w^2\|_{1, \Omega^S} \\ \forall \phi \in \mathcal{D}([0, T[), \forall w^2 \in V^2, \gamma_\Gamma(w^2) &= g \end{aligned}$$

d'où

$$(2.3.16) \quad |\lambda(\phi)(g)| \leq \left(\inf_{w^2 \in V^2, w^2|_\Gamma = g, w^2|_{\Sigma^1} = 0} \|w^2\|_{1, \Omega^S} \right) C_2(\phi) = \|g\|_{**} C_2(\phi)$$

Donc

$$\lambda(\phi) \in M'$$

c) On démontre maintenant que $\lambda \in \mathcal{D}'([0, T[; M')$.

Puisque T_2 est linéaire de $\mathcal{D}([0, T[)$ dans $(V^2)'$, alors λ est linéaire de $\mathcal{D}([0, T[)$ dans M' .

D'après (2.3.16), on a

$$\|\lambda(\phi)\|_{M'} \leq C_2(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}]0, T[$$

En tenant compte de la définition 2.3.2, λ est continue, donc

$$\lambda \in \mathcal{D}']0, T[; M'$$

et vérifie (2.3.12).

D'après (2.3.15), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \lambda(\phi), g \rangle_{M', M} &= \langle T_2(\phi), w^2 \rangle_2 = - \langle T_1(\phi), w^1 \rangle_1 \\ \forall w^1 \in V^1, \forall w^2 \in V^2, \gamma_0(w^1) &= \gamma_\Gamma(w^2) \end{aligned}$$

d'où (2.3.11). \square

Comme une simple conséquence de ce résultat on a le théorème suivant:

Théorème 2.3.2 *Il existe un triplet unique (v, ν, λ) , tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \\ \nu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N) \\ v \in L^2(0, T; V^1) \\ \int_0^t \nu(s) ds \in L^\infty(0, T; V^2) \\ \lambda \in \mathcal{D}']0, T[; M' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) \\ = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} - [\lambda, \gamma_0(w^1)] \\ \forall w^1 \in V^1, \text{ au sens de } \mathcal{D}']0, T[\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0 + \int_0^t \nu(s) ds, w^2) \\ = (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} + [\lambda, \gamma_\Gamma(w^2)] \\ \forall w^2 \in V^2, \text{ au sens de } \mathcal{D}']0, T[\end{array} \right.$$

$$\left(\gamma_0 \left(\int_0^t v(s) ds \right) - \gamma_\Gamma \left(\int_0^t \nu(s) ds \right), \mu \right)_{1/2, \Gamma} = 0, \quad \forall \mu \in M, \text{ p.p. } t \text{ dans }]0, T[$$

$$(v(0), \nu(0)) = (v^0, \nu^0)$$

Remarque 2.3.3 On observe que dans la définition du problème **(P4)** on a $\lambda \in L^2(0, T; M)$, en temps que dans le théorème 2.3.2 on a $\lambda \in \mathcal{D}'(]0, T[; M')$. On peut dire que le triplet donné par le théorème 2.3.2 est une solution “faible” de **(P4)**.

2.4 Un modèle variationnel mixte

A partir du modèle découplé précédent, on construit un modèle mixte, en introduisant en plus une inconnue p , qui a la signification d’une pression dans le fluide.

La contrainte divergence nulle rend difficile la résolution numérique des problèmes précédents. L’utilisation de la méthode mixte pour traiter cette contrainte permet d’éviter la manipulation d’éléments finis de divergence nulle, qui est une tâche difficile surtout en 3D.

Notations :

$$W^1 = H^1(\Omega^F)^N$$

$$W^2 = \{w^2 \in H^1(\Omega^S)^N, \quad w^1 = 0 \text{ sur } \Sigma^1\}$$

$$Q = L^2(\Omega^F)$$

$$M = H^{1/2}(\Gamma)^N$$

$$\gamma_0 : H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N \quad \text{est l'application trace}$$

$$\gamma_\Gamma : H^1(\Omega^S)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N \quad \text{est la restriction de l'application trace sur } \Gamma$$

On se donne

$$\begin{array}{ll} f^1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^F)^N) & \\ f^2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega^S)^N) & \\ \rho^S \in \mathbb{R}_+^* & \text{la masse volumique de la structure} \\ \nu_{cin} \in \mathbb{R}_+^* & \text{la viscosité cinématique du fluide} \\ u^0 \in V^2 & \text{le déplacement initial} \\ (v^0, \nu^0) \in H & \text{les vitesses initiales} \end{array}$$

On considère le problème variationnel **(P5)** suivant:

Trouver (v, ν, p, λ) vérifiant:

$$(2.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^F)^N) \\ \nu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^S)^N) \\ v \in L^2(0, T; W^1) \\ \int_0^t \nu(s) ds \in L^\infty(0, T; W^2) \\ p \in L^2(0, T; Q) \\ \lambda \in L^2(0, T; M) \end{array} \right.$$

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}(v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \frac{d}{dt}(\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S(\int_0^t \nu(s) ds, w^2) \\ & - (\mathbf{div} w^1, p(t))_{0, \Omega^F} - (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ & = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2) \\ & \forall (w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \quad \text{au sens des distributions sur }]0, T[\end{aligned}$$

$$(2.4.3) \quad (\mathbf{div} v(t), q)_{0, \Omega^F} = 0, \quad \forall q \in Q, \quad p.p. \quad t \text{ dans }]0, T[$$

$$(2.4.4) \quad \left(\gamma_0(\int_0^t v(s) ds) - \gamma_\Gamma(\int_0^t \nu(s) ds), \mu \right)_{1/2, \Gamma} = 0, \quad \forall \mu \in M, \quad p.p. \quad t \text{ dans }]0, T[$$

$$(2.4.5) \quad (v(0), \nu(0)) = (v^0, \nu^0)$$

Remarque 2.4.1 La première, la deuxième et la quatrième condition de (2.4.1) sont identiques aux conditions de (2.2.3). On observe que pour la troisième condition, on a renoncé à mettre dans la définition la contrainte $\mathbf{div} v = 0$, mais cette condition résulte dans cette nouvelle formulation de la relation (2.4.3).

L'égalité (2.4.4) remplace la condition de continuité sur Γ , qui est obtenue à partir de la relation (2.2.5).

La condition initiale (2.4.5) est identique à (2.2.6).

Remarque 2.4.2 Le système (2.4.1)-(2.4.5) est de type mixte. On rappelle qu'un système est dit *mixte* si deux ou plusieurs variables dépendantes sont approximées indépendamment; dans notre cas, il s'agit de v et p .

Prenant $w^2 = 0$ dans (2.4.2), on obtient

$$(2.4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(v(t), w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v(t), w^1) - (\mathbf{div} w^1, p(t))_{0, \Omega^F} \\ \quad = (f^1(t), w^1)_{0, \Omega^F} + (\gamma_0(w^1), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ \quad \forall w^1 \in W^1 \text{ au sens des distributions sur }]0, T[\\ (\mathbf{div} v(t), q)_{0, \Omega^F} = 0, \quad \forall q \in Q \text{ p.p. } t \text{ dans }]0, T[\end{array} \right.$$

Prenant $w^1 = 0$ dans (2.4.2), on obtient

$$(2.4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\nu(t), w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S(\int_0^t \nu(s) ds, w^2) \\ \quad = (f^2(t), w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\rho^S} a_S(u^0, w^2) - (\gamma_\Gamma(w^2), \lambda(t))_{1/2, \Gamma} \\ \quad \forall w^2 \in W^2 \text{ au sens des distributions sur }]0, T[\end{array} \right.$$

Evidemment, on a l'équivalence entre les égalités (2.4.2) et (2.4.3) d'une part et les égalités (2.4.6) et (2.3.6) d'autre part.

Proposition 2.4.1 Si (v, ν, p, λ) est une solution du système (2.4.1)-(2.4.5), alors (v, ν, λ) est une solution du système (2.3.1)-(2.3.4).

Démonstration: Soit (v, ν, p, λ) une solution du système (2.4.1)-(2.4.5).

On va démontrer, d'abord, que $v \in L^2(0, T; V^1)$. A cause de (2.4.3), on a

$$\mathbf{div} v(t) = 0, \quad \text{p.p. } t \text{ dans }]0, T[$$

donc $v(t) \in V^1 \subset W^1$.

Mais $\|v(\cdot)\|_{V^1} = \|v(\cdot)\|_{W^1} = \|v(\cdot)\|_{1, \Omega^F}$ et

$$t \longrightarrow \|v(t)\|_{W^1}$$

est une application dans $L^2(0, T)$, donc $v \in L^2(0, T; V^1)$.

Prenant $\mathbf{div} w^1 = 0$ dans (2.4.2), on obtient (2.3.2). \square

Théorème 2.4.1 *Si le problème (2.4.1)-(2.4.5) admet une solution, alors elle est unique.*

Démonstration: Soit $(v^i, \nu^i, p^i, \lambda^i)$ $i = 1, 2$ deux solutions de (2.4.1)-(2.4.5). Selon les propositions 2.4.1, 2.3.1 et le théorème 2.2.1 on a:

$$v^1 = v^2 \text{ et } \nu^1 = \nu^2$$

Soit $p^1 - p^2 = p^*$ et $\lambda^1 - \lambda^2 = \lambda^*$.

On a alors:

$$(\mathbf{div} w^1, p^*)_{0, \Omega^F} + (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda^*)_{1/2, \Gamma} = 0 \quad \forall w^1 \in W^1, w^2 \in W^2$$

Soit l'opérateur de contraintes B défini par:

$$\begin{cases} B : W^1 \times W^2 \longrightarrow Q \times M \\ B(w^1; w^2) = (\mathbf{div} w^1; \gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2)) \end{cases}$$

Donc

$$\langle (p^*, \lambda^*), B(w^1, w^2) \rangle_{Q \times M} = 0 \quad \forall w^1 \in W^1, w^2 \in W^2$$

où $\langle *, * \rangle_{Q \times M}$ est le produit scalaire euclidien sur $Q \times M$ ce qui est équivalent à

$$(p^*, \lambda^*) \perp \mathbf{Im} B$$

L'opérateur B est surjectif, d'où $\mathbf{Im} B = Q \times M$, ce qui implique $(p^*, \lambda^*) = 0$. La surjectivité de B sera démontrée dans le chapitre quatre, section deux. \square

Remarque 2.4.3 L'équation (2.4.6) à laquelle est associée la condition initiale $v(0) = v^0$ représente la formulation variationnelle mixte pour le problème du fluide. On étudie ce type de problème dans le chapitre suivant.

L'équation (2.4.7) à laquelle est associée la condition initiale pour la vitesse $\nu(0) = \nu^0$ représente la formulation variationnelle pour le problème de la structure. La condition initiale pour le déplacement résulte de (2.4.7).

2.5 Bilan du chapitre

Dans la première section de ce chapitre, on présente le problème **(P1)**, qui est un système d'e.d.p. avec les inconnues v vitesse du fluide, p pression dans le fluide, u déplacement de la structure. Ensuite on présente le problème **(P2)**, qui est un système d'e.d.p. avec les inconnues v vitesse du fluide, p pression dans le fluide, ν vitesse de la structure.

Dans la deuxième section, on présente le problème couplé **(P3)**, qui est une formulation variationnelle avec les inconnues v et ν . L'existence et l'unicité d'une solution pour **(P3)** ont été prouvées dans Lions [1969, p. 120] et Dautray & Lions [1988, vol. 8, chap VIII, p.795]. On sait

$$(\mathbf{P1}) \iff (\mathbf{P2}) \Rightarrow (\mathbf{P3})$$

Dans la troisième section, à partir du problème couplé **(P3)**, on construit le problème découplé **(P4)**, qui est une formulation variationnelle avec les inconnues v , ν et λ , où λ a la signification d'une condition à la limite sur la surface de contact Γ . Pour le problème découplé **(P4)**, on a des résultats d'existence et d'unicité dans le sens des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2. On sait

$$\begin{aligned} (v, \nu, \lambda) \text{ solution de } (\mathbf{P4}) &\Rightarrow (v, \nu) \text{ solution de } (\mathbf{P3}) \\ (v, \nu) \text{ solution de } (\mathbf{P3}) &\Rightarrow \exists! \lambda, \text{ tel que } (v, \nu, \lambda) \text{ solution faible de } (\mathbf{P4}) \end{aligned}$$

Dans la quatrième section, on introduit le problème découplé mixte **(P5)**, qui est une formulation variationnelle avec les inconnues v , ν , λ , et p , où p a la signification d'une pression dans le fluide. On démontre que le problème **(P5)** a une solution unique (le théorème 2.4.1). On sait

$$(v, \nu, p, \lambda) \text{ solution de } (\mathbf{P5}) \Rightarrow (v, \nu, \lambda) \text{ solution de } (\mathbf{P4})$$

L'existence de la solution de **(P5)** va être étudiée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Etude de l'existence et de l'unicité pour la solution d'un problème parabolique avec multiplicateur de Lagrange

On a vu dans le chapitre précédent qu'il est possible de découpler le problème fluide structure. Dans ce chapitre, on étudie le problème du fluide obtenu après ce découplage qui conduit à un problème parabolique avec multiplicateur de Lagrange. Ce problème est une variante évolutive du problème stationnaire avec multiplicateur de Lagrange étudié dans Babuska [1971] et Brezzi [1974].

L'intérêt pour les problèmes variationnels de ce type est d'ordre numérique. L'espace où l'on cherche la solution, qui est un espace défini à partir d'un opérateur de contraintes, est remplacé par un espace plus large, sans contrainte et ce fait a des implications positives pour l'approximation: les éléments finis sont plus faciles à trouver et à manipuler. Les méthodes mixtes pour les problèmes paraboliques ont déjà été abordées par Johnson & Thomée [1981] et Squeff [1987]. Ces formulations ont comme inconnues la vitesse et la contrainte. Dans ce chapitre, on présente une formulation variationnelle mixte pour les problèmes paraboliques ayant comme inconnues la vitesse et la pression, ce qui rend

cette formulation plus intéressante, puisque on veut calculer la pression.

3.1 Problème de Stokes stationnaire

L'étude du problème de Stokes pour un fluide incompressible nécessite, dans une formulation variationnelle classique, l'emploi d'espaces de fonctions à divergence nulle. Une autre approche pour traiter ce type de problème a été initialisée par Babuska et Brezzi et consiste à utiliser les multiplicateurs de Lagrange. On utilise alors un espace fonctionnel plus "grand", mais dans lequel il n'y a pas d'opérateur de contrainte et dont l'avantage réside dans une plus grande facilité de construction des éléments finis.

De plus, dans la formulation variationnelle classique, la pression n'intervient pas, ce qui n'est pas le cas dans la formulation variationnelle mixte.

On rappelle d'abord les formulations variationnelles classique et mixte pour le problème stationnaire de Stokes et les théorèmes d'existence et d'unicité associés. Pour plus de détails, voir Dautray & Lions [1988, vol. 8, chap. XIX, p. 824].

3.1.1 Formulation variationnelle classique

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ un ouvert non vide. On note:

$$W = \left(H_0^1(\Omega) \right)^n, \quad L = \left(L^2(\Omega) \right)^n$$

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega), \mathbf{div} v = 0\}$$

$$H = \text{fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } L$$

$$V = \text{fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } W$$

Soit $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$

$$(3.1.1) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{0, \Omega}$$

où $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ est le produit scalaire dans L . L'application a est bilinéaire, continue et grâce à l'inégalité de Poincaré, W -elliptique.

Définition 3.1.1 On donne $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$. Le problème: trouver $u \in V$ tel que:

$$(3.1.2) \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité entre $(H^{-1}(\Omega))^n$ et $(H_0^1(\Omega))^n$, est appelé formulation variationnelle classique du problème stationnaire de Stokes.

On remarque que dans cette définition, la pression n'intervient pas.

Théorème 3.1.1 Pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ un ouvert borné, de frontière lipschitzienne et pour tout $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$, le problème (3.1.2) admet une solution unique u .

De plus, il existe une fonction $p \in L_{loc}^2(\Omega)$, telle que:

$$-\Delta u + \mathbf{grad} p = f \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega$$

$$\mathbf{div} u = 0 \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega$$

3.1.2 Formulation variationnelle mixte

Soit $Q = L_0^2(\Omega)$, où:

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}$$

Soit $b : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$

$$(3.1.3) \quad b(w, q) = -(\mathbf{div} w, q)_{0,\Omega}$$

La formulation variationnelle mixte, appelée aussi formulation variationnelle avec multiplicateur de Lagrange pour le problème stationnaire de Stokes est donnée par:

Définition 3.1.2 On donne $f \in W'$. Le problème:

trouver $u \in W, p \in Q$ tels que

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} a(u, w) + b(w, p) = \langle f, w \rangle_{W', W}, \forall w \in W \\ b(u, q) = 0, \forall q \in Q \end{cases}$$

est appelé *formulation variationnelle mixte du problème stationnaire de Stokes* ou *formulation variationnelle avec multiplicateur de Lagrange*.

Dans le système (3.1.4), le multiplicateur de Lagrange p a la signification physique d'une pression, ce qui justifie l'intérêt de cette formulation.

Des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution du problème de type (3.1.4) sont données dans Babuska [1971] et Brezzi [1974]. On rappelle le résultat qui se trouve dans Brezzi [1974]:

Théorème 3.1.2 Soit $a(., .)$ une forme bilinéaire, continue sur $W \times W$ et V elliptique, i.e.

$$(3.1.5) \quad \inf_{\{v \in V, \|v\|_W=1\}} a(v, v) > 0$$

et $b(., .)$ une forme bilinéaire, continue sur $W \times Q$ telle que:

$$(3.1.6) \quad \exists \delta > 0, \quad \inf_{\{q \in Q, \|q\|_Q=1\}} \sup_{\{v \in W, \|v\|_W=1\}} b(v, q) \geq \delta.$$

Alors pour chaque $f \in W'$ le problème (3.1.4) a une solution unique.

Corollaire 3.1.1 Pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, borné, de frontière lipschitzienne, alors les formes bilinéaires a et b définies par les relations (3.1.1) et (3.1.3) vérifient les hypothèses du théorème 3.1.2, donc il existe une unique solution (u, p) pour le problème stationnaire mixte de Stokes.

Remarque 3.1.1 L'intérêt pour les problèmes variationnels avec multiplicateur de Lagrange est d'ordre numérique. Au lieu d'utiliser des fonctions test v dans V , qui

sont difficiles à approcher surtout en 3D, la formulation variationnelle (3.1.4) utilise les fonctions test w dans W .

3.2 Problème de Stokes évolutif

On étudie maintenant le problème parabolique.

D'abord on rappelle la formulation variationnelle classique pour le problème évolutif de Stokes, puis on introduit une formulation variationnelle mixte pour un problème parabolique abstrait (\mathcal{P}_1) sur lequel on sépare les variables. On constate que pour démontrer l'existence d'une solution pour ce problème parabolique mixte (\mathcal{P}_1), on ne peut pas utiliser les résultats de type Hille-Yosida.

Dans la troisième section, on introduit une nouvelle formulation variationnelle mixte pour laquelle on donne un résultat d'existence et d'unicité.

3.2.1 Formulation variationnelle classique

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on pose le problème suivant:

Définition 3.2.1 *Pour $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$ donnés, on pose le problème (\mathcal{P}_0): trouver u tel que*

$$(3.2.1) \quad u \in L^2(0, T; V)$$

$$(3.2.2) \quad \frac{d}{dt}(u(\cdot), v)_H + a(u(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V$$

au sens des distributions sur $]0, T[$

$$(3.2.3) \quad u(0) = u^0$$

Ce problème est appelé la formulation variationnelle classique pour le problème de Stokes évolutif, voir Dautray & Lions [1988, vol. 8, chap. XII, p. 841].

Théorème 3.2.1 *Pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, borné, de frontière lipschitzienne et $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$, il existe une unique solution u pour le problème (3.2.1)-(3.2.3). De plus:*

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$$

Proposition 3.2.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, il existe une distribution p sur $Q = \Omega \times]0, T[$, telle que la fonction u définie par le théorème 3.2.1 et p satisfont:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathbf{grad} p = f \quad \text{au sens des distributions dans } Q$$

$$\mathbf{div} u = 0 \quad \text{au sens des distributions dans } Q$$

$$\lim_{t \searrow 0} u(t) = u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

3.2.2 Formulation variationnelle mixte

Les méthodes mixtes pour les problèmes paraboliques étudiés dans Johnson & Thomée [1981] et Squeff [1987] ont pour inconnues la vitesse et la contrainte. Puisqu'on veut calculer la pression, nous considérons une formulation en vitesse-pression.

Remarquons qu'il est possible de faire la présentation dans le cadre d'un problème parabolique abstrait quelconque.

Problème abstrait

Notations et hypothèses

Soient $(W, \|\cdot\|_W)$, $(L, \|\cdot\|_L)$ et $(Q, \|\cdot\|_Q)$ trois espaces de Hilbert, avec les produits scalaires respectifs $(\cdot, \cdot)_W$, $(\cdot, \cdot)_L$ et $(\cdot, \cdot)_Q$. On suppose que $W \subseteq L$, W dense dans L , avec l'injection canonique continue, i.e.

$$(3.2.4) \quad \exists \gamma > 0, \forall w \in W, \|w\|_L \leq \gamma \|w\|_W$$

On suppose que W et L sont séparables.

Soient $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ deux formes bilinéaires continues. On peut définir l'ensemble:

$$(3.2.5) \quad V = \{v \in W, b(v, q) = 0, \forall q \in Q\}$$

qui est un sous-espace vectoriel fermé de W . On peut munir V d'une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u, v)_V = (u, v)_W \quad \forall u, v \in V$$

Soit H la fermeture de V dans $(L, \|\cdot\|_L)$; on va le munir d'une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u, v)_H = (u, v)_L \quad \forall u, v \in H$$

En identifiant L et son dual L' , on a:

$$W \hookrightarrow L \hookrightarrow W'$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

Définition 3.2.2 *Etant donnés $u^0 \in L$, $f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ où $0 < T < \infty$, on pose le problème (\mathcal{P}_1):*

Trouver $u \in W(0, T; W, W')$, $p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$, tels que:

$$(3.2.6) \quad \frac{d}{dt} (u(\cdot), w)_L + a(u(\cdot), w) + b(w, p(\cdot)) = \langle f(\cdot), w \rangle_{W', W}, \quad \forall w \in W$$

au sens des distributions sur $]0, T[$

$$(3.2.7) \quad b(u(\cdot), q) = 0, \forall q \in Q, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$(3.2.8) \quad u(0) = u^0$$

Remarque 3.2.1 On note:

$$W(0, T; W, W') = \left\{ u; u \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \frac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; W') \right\}$$

Puisque $W(0, T; W, W') \subset C^0([0, T], L)$, la relation (3.2.8) a un sens et en plus on a:

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), w)_L = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), w \right\rangle_{W', W} \quad \forall w \in W,$$

au sens des distributions sur $]0, T[$.

Remarque 3.2.2 Dans la définition du problème (\mathcal{P}_1) , l'espace V n'intervient plus.

Remarque 3.2.3 Il est possible que, sans aucune hypothèse supplémentaire sur la condition initiale u^0 , le problème (\mathcal{P}_1) soit mal posé.

Séparation des variables

Soient A, B, B^t les opérateurs linéaires, continus définis d'une façon unique par les relations suivantes:

$$(3.2.9) \quad A : W \rightarrow W, a(u, v) = (Au, v)_W, \forall u, v \in W$$

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} & B : W \rightarrow Q, B^t : Q \rightarrow W \\ b(w, q) &= (Bw, q)_Q = (w, B^t q)_W, \forall w \in W, \forall q \in Q \end{aligned}$$

et on pose $D : W \times Q \rightarrow W \times Q$

$$D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 3.5.4 qui sera démontrée en annexe, D est inversible et on pose

$$(3.2.11) \quad D^{-1} = E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}$$

Soit $J_W : W \rightarrow W'$, la bijection donnée par le théorème de Riesz. Alors on peut mettre le problème (\mathcal{P}_1) sous la forme équivalente suivante:

Définition 3.2.3 *Etant donnés $u^0 \in L, f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ où $0 < T < \infty$, trouver $u \in W(0, T; W, W'), p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$, tels que:*

$$(3.2.12) \quad u(\cdot) = E_{11} \circ J_W^{-1}(f(\cdot)) - E_{11} \circ J_W^{-1}\left(\frac{du}{dt}(\cdot)\right), \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$(3.2.13) \quad u(0) = u^0$$

$$(3.2.14) \quad p(\cdot) = E_{21} \circ J_W^{-1}(f(\cdot)) - E_{21} \circ J_W^{-1}\left(\frac{du}{dt}(\cdot)\right), \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Remarque 3.2.4 Pour toute u solution de (3.2.12)-(3.2.13), il existe p donné par (3.2.14), tel que (u, p) soit solution de (\mathcal{P}_1) . On a donc séparé les variables.

Difficulté

On pourrait penser, pour démontrer l'existence et l'unicité, à utiliser le résultat suivant:

Etant donnés $u^0 \in L, f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ et $\mathcal{A} : W \rightarrow W'$ un opérateur linéaire, continu tel que:

$$\exists \alpha > 0, \forall w \in W, \quad \langle \mathcal{A}w, w \rangle_{W', W} \geq \alpha \|w\|_W^2$$

alors il existe une unique solution pour le système suivant:

$$\begin{aligned} u &\in W(0, T; W, W') \\ \mathcal{A}^{-1}\left(\frac{d}{dt}u(\cdot)\right) + u(\cdot) &= \mathcal{A}^{-1}\langle f(\cdot), v \rangle_{W', W}, \quad \text{p.p. dans }]0, T[\\ u(0) &= u^0 \end{aligned}$$

Mais $E_{11} \circ J_W^{-1} : W' \rightarrow W$ n'est pas inversible. En effet, si a est W -elliptique, d'après la proposition 3.5.4, qui sera démontrée en annexe, on a

$$(3.2.15) \quad E_{11} = A^{-1} - A^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1}$$

d'où

$$B \circ E_{11} \circ J_W^{-1}(g) = 0, \quad \forall g \in W'$$

$$Im(E_{11} \circ J_W^{-1}) \subseteq Ker(B) = V \neq W$$

Comme on ne peut pas démontrer l'existence et l'unicité, on introduit alors une nouvelle formulation variationnelle mixte pour laquelle on aura un résultat d'existence et d'unicité.

3.3 Nouvelle formulation variationnelle mixte

3.3.1 Présentation

On ne sait pas si le problème (\mathcal{P}_1) , défini par les relations (3.2.6)-(3.2.8) est bien posé. Il est même possible que, pour démontrer l'existence de la solution, il faille supposer plus de régularité pour la condition initiale.

On introduit alors un nouveau problème parabolique avec multiplicateurs de Lagrange et on démontre l'existence et l'unicité pour la solution de ce problème.

Pour cela, on renonce à l'identification $L = L'$ faite dans la première section et on va identifier H et son dual H' . On obtient:

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

Définition 3.3.1 *On considère le problème (\mathcal{P}_2) défini par:*

trouver un triplet (h, u, p) tel que:

$$(3.3.1) \quad h \in \mathbf{L}^2(0, T; W'), u \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \frac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; V'), p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$$

$$(3.3.2) \quad \langle h(\cdot), w \rangle_{W',W} + a(u(\cdot), w) + b(w, p(\cdot)) = \langle f(\cdot), w \rangle_{W',W}, \forall w \in W$$

presque partout dans $]0, T[$

$$(3.3.3) \quad \langle h(\cdot), v \rangle_{W',W} = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V',V}, \forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$(3.3.4) \quad b(u(\cdot), q) = 0, \forall q \in Q, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$(3.3.5) \quad u(0) = u^0$$

où $f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ et $u^0 \in H$.

Lemme 3.3.1 *Il existe un opérateur linéaire et continu, $\Lambda : V' \rightarrow W'$, tel que:*

$$(3.3.6) \quad \langle f, v \rangle_{V',V} = \langle \Lambda f, v \rangle_{W',W}, \forall f \in V', \forall v \in V$$

Démonstration: On construit une application linéaire et continue $x : W \rightarrow V$, telle que $x(v) = v, \forall v \in V$.

Puisque V est un sous-espace vectoriel fermé, on a $W = V \oplus V^\perp$. Tout w dans W s'écrit de façon unique sous la forme $w = v + v^\perp$. On définit $x : W \rightarrow V, x(w) = v$. Cette application est linéaire. On a $\|w\|_W^2 = \|v\|_W^2 + \|v^\perp\|_W^2$, qui implique $\|x(w)\|_W \leq \|w\|_W$, donc l'application est continue.

Soit $\Lambda : V' \rightarrow W'$, défini par:

$$(3.3.7) \quad \Lambda f \stackrel{\text{déf}}{=} f \circ x$$

L'opérateur Λ est linéaire et on a:

$$(3.3.8) \quad \begin{aligned} \|\Lambda f\|_{W'} &= \sup_{\{w \in W, \|w\|_W \leq 1\}} \langle f \circ x, w \rangle_{W',W} = \sup_{\{w \in W, \|w\|_W \leq 1\}} \langle f, x(w) \rangle_{V',V} \\ &= \sup_{\{w \in W, \|w\|_W \leq 1\}} \frac{\langle f, x(w) \rangle_{V',V}}{\|x\|} \|x\| \leq \sup_{\{v \in V, \|v\|_V \leq 1\}} \langle f, v \rangle_{V',V} \|x\| \leq \|f\|_{V'} \|x\| \end{aligned}$$

Donc Λ est continu. Comme $x(v) = v, \forall v \in V$ on obtient (3.3.6). \square

Corollaire 3.3.1 Si $u \in \mathbf{L}^2(0, T; V')$, alors $\Lambda \circ u \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ et

$$(3.3.9) \quad \langle u(\cdot), v \rangle_{V', V} = \langle \Lambda \circ u(\cdot), v \rangle_{W', W}, \forall v \in V, p.p. t \in]0, T[$$

Démonstration: Puisque Λ est continu, $\Lambda \circ u$ est Borel-mesurable et si on tient compte de l'hypothèse $u \in \mathbf{L}^2(0, T; V')$ et en utilisant (3.3.8), on obtient $\Lambda \circ u \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$.

La relation (3.3.9) résulte de (3.3.6). \square

3.3.2 Théorème d'existence d'une solution

Démontrons maintenant un théorème d'existence d'une solution pour le problème (\mathcal{P}_2) .

Théorème 3.3.1 Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue sur $W \times W$ et W elliptique, i.e.

$$(3.3.10) \quad \exists \alpha > 0, \forall w \in W, a(w, w) \geq \alpha \|w\|_W^2$$

et $b(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue sur $W \times Q$ telle que:

$$(3.3.11) \quad \exists \delta > 0, \inf_{\{q \in Q, \|q\|_Q=1\}} \sup_{\{v \in W, \|v\|_W=1\}} b(w, q) \geq \delta.$$

Alors pour chaque $f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$, il existe au moins une solution pour le problème (\mathcal{P}_2) .

Démonstration: a) D'après les résultats cités dans Dautray & Lions [1988, chap. XVIII, p. 619-620], on a l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème suivant:

Etant donnés $u^0 \in H, f \in \mathbf{L}^2(0, T; V')$, trouver

$$(3.3.12) \quad u \in W(0, T; V, V')$$

$$(3.3.13) \quad \frac{d}{dt} (u(\cdot), v)_H + a(u(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle_{V', V} \quad \forall v \in V$$

au sens des distributions sur $]0, T[$

$$(3.3.14) \quad u(0) = u^0$$

Soit $\bar{u} \in W(0, T; V, V')$ cette solution et soit $h = \Lambda \circ \frac{d\bar{u}}{dt}$, où Λ est l'opérateur défini par le lemme 3.3.1. Grâce au corollaire 3.3.1, on a $h \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$.

b) Considérons maintenant le problème suivant:

Etant donnés $h, f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$, trouver

$$(3.3.15) \quad \tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \tilde{p} \in \mathbf{L}^2(0, T; Q), \text{ tels que}$$

$$(3.3.16) \quad a(\tilde{u}(\cdot), w) + b(w, \tilde{p}(\cdot)) = \langle (f - h)(\cdot), w \rangle_{W', W} \\ \forall w \in W, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$(3.3.17) \quad b(\tilde{u}(\cdot), q) = 0, \forall q \in Q, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Soient $J_W : W \rightarrow W'$ la bijection donnée par le théorème de Riesz et A, B, B^t les opérateurs donnés par les relations (3.2.9), (3.2.10). On peut alors écrire le problème (3.3.15) - (3.3.17) sous la forme équivalente:

Trouver

$$(3.3.18) \quad \tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \tilde{p} \in \mathbf{L}^2(0, T; Q), \text{ tels que} \\ \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot) \\ \tilde{p}(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_W^{-1}(f - h)(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Posons $D : W \times Q \rightarrow W \times Q$

$$D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

et d'après le théorème de Brezzi, cet opérateur est inversible et grâce à la proposition 3.5.4, D^{-1} est continu, donc si $h, f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ on obtient $\tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; W)$ et $\tilde{p} \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$.

c) Montrons que $\tilde{u} = \bar{u}$

On écrit la relation (3.3.16) pour $w = v \in V$ et en utilisant (3.3.17), on obtient:

$$a(\tilde{u}(\cdot), v) = \langle (f - h)(\cdot), v \rangle_{W', W}, \forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Comme $h = \Lambda \circ \frac{d\bar{u}}{dt}$, de (3.3.9), on a:

$$\left\langle \frac{d\bar{u}}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V', V} + a(\tilde{u}(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle_{W', W}, \forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Si l'on tient compte que \bar{u} est la solution du problème (3.3.12)-(3.3.14), on a:

$$(3.3.19) \quad a(\tilde{u}(\cdot) - \bar{u}(\cdot), v) = 0, \forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

On sait que $\bar{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; V)$ et $\tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; W)$ et on veut montrer que

$$\tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; V)$$

D'après (3.3.17), on a $\tilde{u}(\cdot) \in V$, p.p. dans $]0, T[$. Comme $\tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; W)$ et la topologie sur V est celle induite par $(W, \|\cdot\|_W)$, on obtient $\tilde{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; V)$. D'après (3.3.19), on obtient $\tilde{u} = \bar{u}$.

d) Montrons enfin que (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) , dans le sens de la définition 3.3.1, où $u = \tilde{u} = \bar{u}$ et $p = \tilde{p}$.

Pour $u = \tilde{u} = \bar{u}$, $h = \Lambda \circ \frac{du}{dt}$, $p = \tilde{p}$ on a:

$$u \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \text{ d'après (3.3.15)}$$

$$\frac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; V'), \text{ d'après (3.3.12)}$$

$$h \in \mathbf{L}^2(0, T; W'), \text{ grâce au corollaire 3.3.1}$$

$$p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$$

Enfin, en utilisant (3.3.16), (3.3.17), (3.3.14) et le corollaire 3.3.1, on obtient que (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) . \square

Remarque 3.3.1 Ce théorème reste valable même dans le cas où la fonctionnelle a est V -elliptique.

Remarque 3.3.2 Si (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) , alors u est l'unique solution du problème (3.3.12)-(3.3.14), h vérifie la relation (3.3.3) et p vérifie la relation:

$$(3.3.20) \quad p(\cdot) = E_{21} \circ J_W^{-1}(f(\cdot)) - E_{21} \circ J_W^{-1}(h(\cdot)), \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Comme h est uniquement déterminé sur l'ensemble V , la relation (3.3.20) est une contrainte pour p .

Remarque 3.3.3 Soient $p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$ arbitraire et u la solution du problème (3.3.12)-(3.3.14). Soit h vérifiant la relation (3.3.3). Grâce au lemme 3.3.1, un tel h existe. Alors (h, u, p) vérifie les relations (3.3.1), (3.3.3)-(3.3.5) et:

$$(3.3.21) \quad \langle h(\cdot), v \rangle_{W', W} + a(u(\cdot), v) + b(v, p(\cdot)) = \langle f(\cdot), v \rangle_{W', W}, \forall v \in V$$

presque partout dans $]0, T[$.

La relation (3.3.21) est en fait similaire à la relation (3.3.2) mais écrite pour v dans V . Puisque V n'est pas dense dans W pour la topologie $\|\cdot\|_W$, on ne peut pas obtenir (3.3.2) à partir de (3.3.21). Remarquons que l'on a utilisé le fait que V était dense dans H pour la topologie $\|\cdot\|_H$, ce qui est différent.

Remarque 3.3.4 Si (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) , alors u est l'unique solution du problème (3.3.12) – (3.3.14). La démonstration du théorème 3.3.1 reste valable même si on remplace $h = \Lambda \circ \frac{d\bar{u}}{dt}$ par un $h \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ arbitraire, qui vérifie (3.3.3). Puisque l'ensemble des applications $h \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$ qui vérifient (3.3.3) est très riche en éléments, on va ajouter un critère qui va permettre de ne sélectionner qu'un seul élément parmi l'ensemble des solutions du problème (\mathcal{P}_2) .

3.3.3 Critère supplémentaire, théorème d'unicité

Pour obtenir l'unicité, on ajoute un critère qui permet de ne sélectionner qu'un seul élément parmi l'ensemble des solutions du problème (\mathcal{P}_2) .

Définition 3.3.2 On cherche parmi les solutions du problème (\mathcal{P}_2) , une solution (h, u, p) dans le sens de la définition 3.3.1, telle que:

$$(3.3.22) \quad \|h(\cdot)\|_{W'} = \left\| \frac{du}{dt}(\cdot) \right\|_{V'} \quad p.p. \text{ dans }]0, T[$$

Théorème 3.3.2 Dans les hypothèses du théorème 3.3.1, il existe une unique solution du problème (\mathcal{P}_2) vérifiant en plus (3.3.22).

Démontrons d'abord le résultat suivant:

Lemme 3.3.2 Soient $(W, \|\cdot\|_W)$ un espace de Hilbert et $V \subset W$ un sous-espace vectoriel fermé. Soit $U = V^\perp$ l'espace vectoriel fermé perpendiculaire à V . Les sous-espaces V et U avec les produits scalaires induits par $(\cdot, \cdot)_W$ respectivement sur V et U deviennent des espaces de Hilbert. Si $h \in W'$, alors il existe $h_1 \in V'$ et $h_2 \in U'$ uniques, tels que:

$$(3.3.23) \quad \langle h, w \rangle_{W', W} = \langle h_1, \text{Pr}_1 w \rangle_{V', V} + \langle h_2, \text{Pr}_2 w \rangle_{U', U} \quad \forall w \in W$$

où Pr_1 et Pr_2 sont les applications projections respectivement sur V et U , qui sont bien définies, car V et U sont convexes et fermés. En plus:

$$(3.3.24) \quad \|h\|_{W'}^2 = \|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2$$

Démonstration: Soit $h \in W'$.

Existence: On pose:

$$\begin{aligned} h_1 : V &\rightarrow R, & h_1(v) &= \langle h, v \rangle_{W',W} \\ h_2 : U &\rightarrow R, & h_2(v^\perp) &= \langle h, v^\perp \rangle_{W',W} \end{aligned}$$

Bien évidemment on a $h_1 \in V'$, $h_2 \in U'$ et

$$\langle h, v + v^\perp \rangle_{W',W} = \langle h_1, v \rangle_{V',V} + \langle h_2, v^\perp \rangle_{U',U} \quad \forall v \in V, \forall v^\perp \in U$$

Puisque V est fermé, on a $W = V \oplus U$ et en conséquence, chaque $w \in W$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $w = v + v^\perp$, où $v = \text{Pr}_1 w$ et $v^\perp = \text{Pr}_2 w$, d'où la relation (3.3.23).

Unicité: Dans la relation (3.3.23) on fait d'abord $w = v$, puis $w = v^\perp$. On obtient:

$$\begin{aligned} \langle h, v \rangle_{W',W} &= \langle h_1, v \rangle_{V',V} \quad \forall v \in V \\ \langle h, v^\perp \rangle_{W',W} &= \langle h_2, v^\perp \rangle_{U',U} \quad \forall v^\perp \in U \end{aligned}$$

Donc h_1 et h_2 sont déterminés de manière unique.

On démontre maintenant la relation (3.3.24).

Si $h = 0$, alors (3.3.24) est vérifiée. On va étudier le cas $h \neq 0$. Il est clair que dans ce cas $h_1 \neq 0$ ou $h_2 \neq 0$, donc $\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2 > 0$. Soit $w \neq 0$, $w = v + v^\perp$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$\langle h_1, v \rangle_{W',W} \leq \|h_1\|_{V'} \|v\|_V$$

On déduit:

$$(3.3.25) \quad \frac{\langle h_1, v \rangle_{V',V}}{\sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} \sqrt{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2}} \leq \frac{\|h_1\|_{V'} \|v\|_V}{\sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} \sqrt{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\|h_1\|_{V'}^2}{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} + \frac{\|v\|_V^2}{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2} \right)$$

D'une façon analogue, on obtient:

$$(3.3.26) \quad \frac{\langle h_2, v^\perp \rangle_{U' \times U}}{\sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} \sqrt{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\|h_2\|_{U'}^2}{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} + \frac{\|v^\perp\|_U^2}{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2} \right)$$

On fait la sommation des relations (3.3.25) et (3.3.26) et on obtient:

$$(3.3.27) \quad \frac{\langle h_1, v \rangle_{V' \times V} + \langle h_2, v^\perp \rangle_{U' \times U}}{\sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} \sqrt{\|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2}} \leq 1$$

Puisque $w = v + v^\perp$ on a $\|w\|_W^2 = \|v\|_V^2 + \|v^\perp\|_U^2$. D'après (3.3.27) et (3.3.23) on a:

$$(3.3.28) \quad \frac{\langle h, w \rangle_{W' \times W}}{\|w\|_W} \leq \sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2} \quad \forall w \in W, w \neq 0$$

Puisque V et U sont des espaces de Hilbert, il existe $v_1 \in V, v_2 \in U$ tels que:

$$\langle h_1, v_1 \rangle_{V', V} = \|h_1\|_{V'}^2 = \|v_1\|_V^2$$

$$\langle h_2, v_2 \rangle_{U', U} = \|h_2\|_{U'}^2 = \|v_2\|_U^2$$

Pour $\bar{w} = v_1 + v_2$ on a:

$$(3.3.29) \quad \frac{\langle h, \bar{w} \rangle_{W', W}}{\|\bar{w}\|_W} = \sqrt{\|h_1\|_{V'}^2 + \|h_2\|_{U'}^2}$$

D'après (3.3.28) et (3.3.29) on obtient (3.3.24). \square

Démonstration du théorème 3.3.2:

a) Existence: Soit $u \in W(0, T; V, V')$ l'unique solution du problème (3.3.12) – (3.3.14). Soit l'application $h :]0, T[\rightarrow W'$ définie par:

$$(3.3.30) \quad \langle h(\cdot), w \rangle_{W', W} = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), \text{Pr}_1 w \right\rangle_{V', V} \quad \forall w \in W, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

Puisque $\frac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; V')$, on a $h \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$. Evidemment h vérifie la relation (3.3.3). Grâce au théorème 3.3.1, il existe une solution (h, u, p) du problème (\mathcal{P}_2) . Démontrons qu'elle vérifie la relation (3.3.22).

$$(3.3.31) \quad \begin{aligned} \|h(\cdot)\|_{W'} &= \sup_{w \in W - \{0\}} \frac{\langle h(\cdot), w \rangle_{W', W}}{\|w\|_W} \geq \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle h(\cdot), v \rangle_{W', W}}{\|v\|_W} \\ &= \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V', V}}{\|v\|_V} = \left\| \frac{du}{dt}(\cdot) \right\|_{V'} \quad p.p. \text{ dans }]0, T[\end{aligned}$$

Soit $w \in W$, $\|w\|_W \leq 1$. Alors il existe $v = \text{Pr}_1 w$, $v^\perp = \text{Pr}_2 w$, tels que $w = v + v^\perp$ et par conséquent $\|v\|_V \leq \|w\|_W \leq 1$. On a:

$$\langle h(\cdot), w \rangle_{W', W} = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V', V} \quad p.p. \text{ dans }]0, T[$$

D'où:

$$\sup_{\|w\| \leq 1} \langle h(\cdot), w \rangle_{W', W} \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V', V}$$

ou de manière équivalente:

$$(3.3.32) \quad \|h(\cdot)\|_{W'} \leq \left\| \frac{du}{dt}(\cdot) \right\|_{V'} \quad p.p. \text{ dans }]0, T[$$

D'après les inégalités (3.3.31) et (3.3.32) on obtient la relation (3.3.22).

b) Unicité: Soit (h, u, p) une solution du problème (\mathcal{P}_2) vérifiant (3.3.22). Alors u est l'unique solution du problème (3.3.12) – (3.3.14), h vérifiant les relations (3.3.3) et (3.3.22) et p la relation (3.3.20). Grâce au lemme 3.3.2, on peut écrire h sous la forme suivante:

$$\langle h(\cdot), w \rangle_{W', W} = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), \text{Pr}_1 w \right\rangle_{V', V} + \langle h_2(\cdot), \text{Pr}_2 w \rangle_{U', U} \quad \forall w \in W, p.p. \text{ dans }]0, T[$$

où $h_2 \in \mathbf{L}^2(0, T; U')$ et en plus:

$$(3.3.33) \quad \|h(\cdot)\|_{W'}^2 = \left\| \frac{du}{dt}(\cdot) \right\|_{V'}^2 + \|h_2(\cdot)\|_{U'}^2 \quad p.p. \text{ dans }]0, T[$$

D'après les relations (3.3.22) et (3.3.33), on obtient $h_2 = 0$, donc h est déterminé de manière unique. Puisque p et h sont liés par l'égalité (3.3.20), on déduit que p est déterminé de manière unique. \square

Remarque 3.3.5 Si (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) vérifiant (3.3.22), alors u est l'unique solution du problème (3.3.12) – (3.3.14) et réciproquement, si u est l'unique solution du problème (3.3.12) – (3.3.14), alors on peut trouver d'une manière unique h et p , tels que (h, u, p) est une solution du problème (\mathcal{P}_2) vérifiant (3.3.22). Donc on a trouvé pour le problème parabolique le même type de relation entre les formulations variationnelles classique et mixte que dans le cas stationnaire.

Remarque 3.3.6 L'introduction du critère (3.3.22) est justifiée par le fait suivant: le schéma implicite standard, pour approcher la solution du problème parabolique mixte en vitesse-pression, calcule à chaque pas de temps $n \geq 1$, les quantités $(h^n, u^n, p^n) \in L \times W \times Q$, qui sont respectivement des approximations de $h(n\Delta t)$, $u(n\Delta t)$, $p(n\Delta t)$

$$\begin{cases} (h^n, w)_L + a(u^n, w) + b(w, p^n) = \langle f^n, w \rangle_{W', W} & \forall w \in W \\ b(u^n, q) = 0 & \forall q \in Q \\ h^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \end{cases}$$

où $u^0 \in H$.

Puisque $u^n \in V, \forall n \geq 1$, on obtient:

$$(h^n, v^\perp)_W = \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v^\perp \right)_W = 0 \quad \forall v^\perp \in V^\perp, \forall n \geq 2$$

La relation précédente justifie notre choix pour le critère (3.3.22) qui est, en fait, équivalent à:

$$\langle h(\cdot), v^\perp \rangle_{W', W} = 0 \quad \forall v^\perp \in V^\perp, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

3.4 Application: une formulation variationnelle mixte pour l'équation d'évolution correspondant au problème de Stokes

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un ouvert non vide, borné, $W = (H_0^1(\Omega))^n$, $L = (L^2(\Omega))^n$ et $Q = L_0^2(\Omega)$, où:

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}$$

Soit $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{0, \Omega}$$

L'application a est bilinéaire, continue et grâce à l'inégalité de Poincaré, W -elliptique.

Soit $b : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$

$$b(w, q) = -(\operatorname{div} w, q)_{0, \Omega}$$

L'application b est bilinéaire, continue et elle vérifie la condition (3.3.11), voir par exemple [Gira 86], p. 81.

Soit

$$V = \{v \in W, b(w, q) = 0, \forall q \in Q\}$$

et H la fermeture de V dans L . On va identifier H et son dual H' .

Définition 3.4.1 *On pose le problème parabolique mixte suivant: trouver un triplet (h, u, p) tel que:*

$$h \in \mathbf{L}^2(0, T; W'), u \in \mathbf{L}^2(0, T; W), \frac{du}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; V'), p \in \mathbf{L}^2(0, T; Q)$$

$$\langle h(\cdot), w \rangle_{W', W} + a(u(\cdot), w) + b(w, p(\cdot)) = \langle f(\cdot), w \rangle_{W', W}, \forall w \in W$$

presque partout dans $]0, T[$

$$\langle h(\cdot), v \rangle_{W', W} = \left\langle \frac{du}{dt}(\cdot), v \right\rangle_{V', V}, \forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$b(u(\cdot), q) = 0, \forall q \in Q, \text{ p.p. dans }]0, T[$$

$$\|h(\cdot)\|_{W'} = \left\| \frac{du}{dt}(\cdot) \right\|_{V'} \quad \text{p.p. dans }]0, T[$$

$$u(0) = u^0$$

où $u^0 \in H, f \in \mathbf{L}^2(0, T; W')$.

Corollaire 3.4.1 *Sous les hypothèses du début de cette section, il existe une unique solution pour le problème parabolique mixte correspondant au problème de Stokes, dans le sens de la définition 3.4.1.*

3.5 Annexe: quelques propriétés des opérateurs définis par blocs

Soit $D : W \times Q \rightarrow W \times Q$ un opérateur non-borné. On fait les notations suivantes:

$$\text{Pr}_W : W \times Q \rightarrow W, \text{Pr}_W(w, q) = w, \forall (w, q) \in W \times Q$$

$$\text{Pr}_Q : W \times Q \rightarrow Q, \text{Pr}_Q(w, q) = q, \forall (w, q) \in W \times Q$$

$$(3.5.1) \quad \begin{array}{ll} D_{11} : W \rightarrow W & D_{12} : Q \rightarrow W \\ D_{11} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Pr}_W D(w, 0) & D_{12} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Pr}_W D(0, q) \\ D_{21} : W \rightarrow Q & D_{22} : Q \rightarrow Q \\ D_{21} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Pr}_Q D(w, 0) & D_{22} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Pr}_Q D(0, q) \end{array}$$

On a:

$$\begin{aligned} D(w, q) &= (\text{Pr}_W D(w, q), \text{Pr}_Q D(w, q)) \\ &= (\text{Pr}_W D(w, 0) + \text{Pr}_W D(0, q), \text{Pr}_Q D(w, 0) + \text{Pr}_Q D(0, q)) \end{aligned}$$

$$= (D_{11}w + D_{12}q, D_{21}w + D_{22}q)$$

En utilisant une notation matricielle, on peut écrire formellement:

$$D(w, q) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix}$$

On note I_X l'identité sur un espace arbitraire X .

Proposition 3.5.1 *Soit $I_{W \times Q}$ l'identité sur $W \times Q$. Alors:*

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_W & I_{12}(q) &= 0, \forall q \in Q \\ I_{21}(w) &= 0, \forall w \in W & I_{22} &= I_Q \end{aligned}$$

Démonstration: Evidente.

Proposition 3.5.2 *Soient $D, E : W \times Q \rightarrow W \times Q$ deux opérateurs non-bornés. Alors:*

$$(E \circ D)_{ij} = \sum_{k=1}^2 E_{ik} \circ D_{kj}, \forall i, j = 1, 2$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} (E \circ D)_{11}(w) &= \text{Pr}_W (E \circ D)(w, 0) = \text{Pr}_W E(D(w, 0)) \\ &= \text{Pr}_W E(\text{Pr}_W D(w, 0), \text{Pr}_Q D(w, 0)) = \text{Pr}_W E(D_{11}w, D_{21}w) \\ &= \text{Pr}_W (E(D_{11}w, 0) + E(0, D_{21}w)) = \text{Pr}_W E(D_{11}w, 0) + \text{Pr}_W E(0, D_{21}w) \\ &= (E_{11} \circ D_{11})(w) + (E_{12} \circ D_{21})(w) \end{aligned}$$

On démontre les autres relations de la même manière. \square

Proposition 3.5.3 *Soit $D : W \times Q \rightarrow W \times Q$ un opérateur inversible et $D^{-1} = E$.*

Si D_{11} est inversible, alors l'opérateur $-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22}$ est aussi inversible et on a:

$$\begin{aligned} E_{11} &= D_{11}^{-1} + D_{11}^{-1}D_{12} \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} D_{21}D_{11}^{-1} \\ E_{12} &= -D_{11}^{-1}D_{12} \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} \\ E_{21} &= - \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} D_{21}D_{11}^{-1} \\ E_{22} &= \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Démonstration: D'après l'hypothèse, on a:

$$D \circ E = E \circ D = I_{W \times Q}$$

On déduit des propositions 3.5.1 et 3.5.2 que:

$$(3.5.2) \quad D_{11}E_{11} + D_{12}E_{21} = I_W$$

$$(3.5.3) \quad D_{11}E_{12} + D_{12}E_{22} = 0$$

$$(3.5.4) \quad D_{21}E_{11} + D_{22}E_{21} = 0$$

$$(3.5.5) \quad D_{21}E_{12} + D_{22}E_{22} = I_Q$$

$$(3.5.6) \quad E_{11}D_{11} + E_{12}D_{21} = I_W$$

$$(3.5.7) \quad E_{11}D_{12} + E_{12}D_{22} = 0$$

$$(3.5.8) \quad E_{21}D_{11} + E_{22}D_{21} = 0$$

$$(3.5.9) \quad E_{21}D_{12} + E_{22}D_{22} = I_Q$$

Puisque D_{11} est inversible, de (3.5.3) on a:

$$(3.5.10) \quad E_{12} = -D_{11}^{-1}D_{12}E_{22}$$

et si on utilise cette relation dans (3.5.5), on obtient:

$$\left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22}\right)E_{22} = I_Q$$

De la même manière, d'après (3.5.8) et (3.5.9) on a:

$$(3.5.11) \quad E_{22} \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22}\right) = I_Q$$

Donc E_{22} est inversible et

$$E_{22} = \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22}\right)^{-1}$$

De (3.5.10) on obtient:

$$E_{12} = -D_{11}^{-1}D_{12} \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1},$$

de (3.5.6) on obtient:

$$E_{11} = D_{11}^{-1} - E_{12}D_{21}D_{11}^{-1} = D_{11}^{-1} + D_{11}^{-1}D_{12} \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} D_{21}D_{11}^{-1}$$

de (3.5.8) on obtient:

$$E_{21} = -E_{22}D_{21}D_{11}^{-1} = - \left(-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} + D_{22} \right)^{-1} D_{21}D_{11}^{-1} \quad \square$$

Proposition 3.5.4 Soient $A : W \rightarrow W$ et $B : W \rightarrow Q$ deux opérateurs continus.

Grâce au théorème de Riesz, il existe un unique opérateur $B^t : Q \rightarrow W$, tel que

$$(Bw, q)_Q = (w, B^t q)_W, \forall w \in W, \forall q \in Q$$

On suppose:

$$(3.5.12) \quad \forall w \in W, \|Aw\|_W \leq \|a\| \|w\|_W$$

$$(3.5.13) \quad \exists \alpha > 0, \forall w \in W, (Aw, w)_W \geq \alpha \|w\|_W^2$$

$$(3.5.14) \quad \exists \delta > 0, \forall q \in Q, \|B^t q\|_W \geq \delta \|q\|_Q$$

et on pose $D : W \times Q \rightarrow W \times Q$

$$D = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

Alors D est inversible, l'opérateur inverse D^{-1} est continu et

$$(3.5.15) \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1} & A^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1} \\ (BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1} & -(BA^{-1}B^t)^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration: D'après le théorème de Lax-Milgram et la relation (3.5.13) on déduit que A est inversible et

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(W)} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Grâce à la théorie de Babuska-Brezzi et sous les hypothèses (3.5.12)-(3.5.14), on obtient que D est inversible. Si l'on utilise maintenant la proposition 3.5.3, on obtient que l'opérateur $BA^{-1}B^t$ est inversible et:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1} & A^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1} \\ (BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1} & -(BA^{-1}B^t)^{-1} \end{pmatrix}$$

Grâce au théorème de l'application ouverte dû à Banach (voir par exemple Brezis [1983], p. 18), l'opérateur D^{-1} est continu.

Chapitre 4

Un problème semi-discrétisé en temps

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un schéma semi-discrétisé en temps associé au problème continu introduit dans le deuxième chapitre.

Dans la première section, on présente un schéma semi-discrétisé en temps.

Dans la deuxième section, il est démontré que le problème semi-discrétisé en temps est bien posé, en utilisant les résultats de Babuska [1971] et Brezzi [1974]. D'abord, la surjectivité d'opérateur des contraintes est prouvée. Grâce au théorème de caractérisation des opérateurs surjectifs, la condition *inf-sup* est prouvée.

Dans la troisième section, la stabilité en temps du schéma est démontrée. La preuve est originale; on n'utilise pas séparément les théories de stabilité déjà existantes pour le fluide ou pour la structure, mais on démontre la stabilité simultanément pour le fluide et pour la structure. Les vitesses sont évaluées dans la norme de l'espace H^1 , donc mieux que dans l'évaluation habituelle dans la norme de l'espace L^2 , utilisée pour l'approximation de l'équation de Stokes.

4.1 Présentation d'un schéma semi-discrétisé en temps

Soient Ω^F et Ω^S deux ouverts bornés dans \mathbb{R}^N , où $N = 2$ ou 3 , des frontières de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, chacun situé localement d'un seul côté de sa frontière. On suppose que

$$\begin{aligned}\overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} &= \Gamma, \quad \partial\Omega^F = \Gamma, \quad \partial\Omega^S = \Gamma \cup \overline{\Sigma^1} \cup \Sigma^2, \\ \Gamma, \overline{\Sigma^1}, \Sigma^2 &\text{ disjointes, } \text{mes}(\Sigma^1) > 0 \\ \Sigma^1 \text{ et } \Sigma^2 &\text{ sont deux variétés ouvertes en } \mathbb{R}^{N-1}\end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on peut parler des espaces de Hilbert $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Sigma^1)$ et des applications trace sur Γ et Σ^1 , voir par exemple Dautray & Lions [1988, vol. 3, chap. IV, p. 904].

On se donne :

i) $\rho^S > 0$ la densité de la structure, $\nu_{cin} > 0$ la viscosité cinématique du fluide

ii) $v^n \in W^1$ la vitesse du fluide, où $W^1 = H^1(\Omega^F)^N$

iii) $\nu^0, \dots, \nu^n \in W^2$ les vitesses de la structure, où

$$W^2 = \{w^2 \in H^1(\Omega^S)^N, w^2 = 0 \text{ sur } \Sigma_1\}$$

iv) $u^0 \in W^2$ le déplacement initial de la structure

v) $v^0 = \nu^0$ sur Γ

vi) $f_1^{n+1} \in L^2(\Omega^F)^N$ et $f_2^{n+1} \in L^2(\Omega^S)^N$

Alors, à partir du problème continu introduit au second chapitre et en utilisant les approximations suivantes:

$$(4.1.1) \quad \int_0^{t^{n+1}} \nu(s) ds \simeq \frac{\Delta t}{2} (\nu^0 + 2 \sum_{i=1}^n \nu^i + \nu^{n+1}) \quad (\text{la méthode des trapèzes})$$

où $\nu^i = \nu(t^i)$ et $t^i = i \times \Delta t$, on obtient le schéma semi-discretisé implicite suivant:

Trouver $(v^{n+1}, \nu^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^{n+1}) \in W^1 \times W^2 \times Q \times M$ où $Q = L^2(\Omega^F)$ et $M = H^{1/2}(\Gamma)^N$, tel que:

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (v^{n+1}, w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v^{n+1}, w^1) + \frac{1}{\Delta t} (\nu^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{\Delta t}{2\rho^S} a_S(\nu^{n+1}, w^2) \\ & - (\mathbf{div} w^1, p^{n+1})_{0, \Omega^F} - (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda^{n+1})_{1/2, \Gamma} \\ & = (f_1^{n+1}, w^1)_{0, \Omega^F} + (f_2^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} \\ & - \frac{1}{\rho^S} a_S(u_0 + \frac{\Delta t}{2} (\nu^0 + 2 \sum_{i=1}^n \nu^i), w^2) + \frac{1}{\Delta t} (v^n, w^1)_{0, \Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} (\nu^n, w^2)_{0, \Omega^S} \\ & \quad \forall w^1 \in W^1 \text{ et } \forall w^2 \in W^2 \end{aligned}$$

$$(4.1.3) \quad (\mathbf{div} v^{n+1}, q)_{0, \Omega^F} = 0, \quad \forall q \in Q$$

$$(4.1.4) \quad (\gamma_0(v^{n+1}) - \gamma_\Gamma(\nu^{n+1}), \mu)_{1/2, \Gamma} = 0, \quad \forall \mu \in M$$

$\gamma_0 : H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$ est l'application trace

$\gamma_\Gamma : H^1(\Omega^S)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$ est la restriction de l'application trace sur Γ

Remarque 4.1.1 A chaque pas de temps, il faut donc résoudre un système mixte-hybride de type (4.1.2)-(4.1.4). Ce schéma constitue un algorithme de résolution.

Remarque 4.1.2 Du point de vue numérique, le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{1/2, \Gamma}$ est difficile à manipuler. Dans les équations (4.1.2) et (4.1.4) on peut remplacer ce produit par $(\cdot, \cdot)_{0, \Gamma}$ mais, dans ce cas, l'espace normé $(H^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{0, \Gamma})$ n'est pas un espace de Banach. On va revenir sur ce problème dans la section suivante.

Remarque 4.1.3 Cette discrétisation en temps correspond au schéma d'Euler implicite pour le problème du fluide et au schéma de Newmark avec les paramètres $\delta = 1$ et $\theta = 1/2$, pour le problème de la structure. On rappelle le schéma de Newmark pour le problème de la structure.

On se donne:

u^n, ν^n, a^n le déplacement, la vitesse et l'accélération de la structure à l'instant $n\Delta t$,

$f_2^{n+1} \in \left(L^2(\Omega^S)\right)^N$ la densité des forces extérieures sur Ω^S à l'instant $(n+1)\Delta t$,

$\lambda^{n+1} \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^N$ une condition aux limites sur la surface de contact Γ à l'instant $(n+1)\Delta t$.

Trouver u^n, ν^n, a^n dans W^2 , tels que

$$(4.1.5) \quad \begin{aligned} & (a^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S (u^{n+1}, w^2) \\ & = (f_2^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} - (\gamma_\Gamma (w^2), \lambda^{n+1})_{1/2, \Gamma}, \quad \forall w^2 \in W^2 \end{aligned}$$

$$(4.1.6) \quad \nu^{n+1} = \nu^n + \Delta t \left[(1 - \delta) a^n + \delta a^{n+1} \right]$$

$$(4.1.7) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \nu^n + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \theta \right) a^n + \theta a^{n+1} \right]$$

où $\delta, \theta \in \mathbb{R}$.

Pour $\delta = 1$ et $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$(4.1.8) \quad \nu^{n+1} = \nu^n + \Delta t a^{n+1}$$

$$(4.1.9) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \nu^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} a^{n+1}$$

D'après (4.1.8) et (4.1.9), on a

$$(4.1.10) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \nu^n + (\Delta t)^2 \frac{\nu^{n+1} - \nu^n}{2\Delta t} = u^n + \Delta t \left(\frac{\nu^{n+1} + \nu^n}{2} \right)$$

Après sommation en n de l'égalité (4.1.10), on obtient

$$(4.1.11) \quad u^{n+1} = u^0 + \frac{\Delta t}{2} \left(\nu^0 + 2 \sum_{i=1}^n \nu^i + \nu^{n+1} \right)$$

En introduisant (4.1.8) et (4.1.11) dans (4.1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
(4.1.12) \quad & \frac{1}{\Delta t} (\nu^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{\Delta t}{2\rho^S} a_S (\nu^{n+1}, w^2) \\
& = \frac{1}{\Delta t} (\nu^n, w^2)_{0, \Omega^S} + (f_2^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} \\
& - \frac{1}{\rho^S} a_S \left(u^0 + \frac{\Delta t}{2} \left(\nu^0 + 2 \sum_{i=1}^n \nu^i \right), w^2 \right) - (\gamma_\Gamma (w^2), \lambda^{n+1})_{1/2, \Gamma}, \quad \forall w^2 \in W^2
\end{aligned}$$

Si on fait $w^2 = 0$ dans (4.1.2), on obtient exactement la relation (4.1.12).

4.2 Existence et unicité pour le problème semi-discretisé en temps

Dans ce paragraphe, on montre que le problème semi-discretisé en temps est bien posé, en utilisant les résultats de Babuska [1971] et Brezzi [1974]. D'abord, la surjectivité d'opérateur des contraintes est prouvée. Grâce au théorème de caractérisation des opérateurs surjectifs, la condition *inf-sup* est prouvée.

D'abord, on énonce un résultat reliant la théorie mixte-hybride et la théorie du lagrangien.

Considérons:

$$\begin{aligned}
(4.2.1) \quad & J_1 : W^1 \longrightarrow \mathbb{R} \\
& J_1(w^1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta t} (w^1, w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F (w^1, w^1) \right] \\
& - (f_1^{n+1}, w^1)_{0, \Omega^F} - \frac{1}{\Delta t} (v^n, w^1)_{0, \Omega^F}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.2.2) \quad & J_2 : W^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
& J_2(w^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta t} (w^2, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{\Delta t}{2\rho^S} a_S (w^2, w^2) \right] \\
& - (f_2^{n+1}, w^2)_{0, \Omega^S} - \frac{1}{\Delta t} (\nu^n, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{1}{\rho^S} a_S \left(u_0 + \frac{\Delta t}{2} \left(\nu^0 + 2 \sum_{i=1}^n \nu^i \right), w^2 \right)
\end{aligned}$$

$$(4.2.3) \quad L : (W^1 \times W^2) \times (Q \times M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L[(w^1, w^2); (q, \mu)] = J_1(w^1) + J_2(w^2) - (\mathbf{div} w^1, q)_{0, \Omega^F} - (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \mu)_{1/2, \Gamma}$$

Proposition 4.2.1 $(v^{n+1}, \nu^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^{n+1})$ est une solution pour le problème (4.1.2)-(4.1.4) si et seulement si $(v^{n+1}, \nu^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^{n+1})$ est un point selle pour le lagrangien L .

Démonstration : Classique, voir par exemple Ekeland [1974].

Maintenant, il faut répondre à la question suivante: dans quelles conditions a-t-on l'existence et l'unicité pour un point selle ?

Des conditions suffisantes ont été données par Babuska-Brezzi. Elles s'appellent aussi les conditions **inf-sup**. On va montrer que, dans notre cas, ces conditions sont vérifiées.

Proposition 4.2.2 Soient Ω^F et Ω^S deux ouverts bornés dans \mathbb{R}^N , où $N = 2$ ou 3 , tels que

$$(4.2.4) \quad \begin{cases} \Omega^F \text{ polyèdre convexe si } N=3 \text{ ou polyg\^one convexe si } N=2, \\ \Omega^S \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux,} \\ \overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} = \Gamma, \\ \partial\Omega^F = \Gamma, \partial\Omega^S = \Gamma \cup \overline{\Sigma^1} \cup \Sigma^2, \\ \Gamma, \overline{\Sigma^1}, \Sigma^2 \text{ disjointes,} \\ \Sigma^1 \text{ et } \Sigma^2 \text{ sont deux variétés ouvertes en } \mathbb{R}^{N-1} \\ \text{mes}(\Sigma^1) > 0 \end{cases}$$

Soit l'opérateur de contraintes B défini par:

$$(4.2.5) \quad \begin{cases} B : W^1 \times W^2 \longrightarrow Q \times M \\ B(w^1; w^2) = (\mathbf{div} w^1; \gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2)) \end{cases}$$

Alors l'opérateur de contraintes B est surjectif et continu de $W^1 \times W^2$ muni de la norme

$$\|(w^1, w^2)\| = \left(\|w^1\|_{1, \Omega^F}^2 + \|w^2\|_{1, \Omega^S}^2 \right)^{1/2}$$

dans $Q \times M$ muni soit de la norme

$$\|(q, \mu)\| = \left(\|q\|_{0, \Omega^F}^2 + \|\mu\|_{1/2, \Gamma}^2 \right)^{1/2}$$

soit de la norme

$$\|(q, \mu)\| = \left(\|q\|_{0, \Omega^F}^2 + \|\mu\|_{0, \Gamma}^2 \right)^{1/2}$$

Démonstration: La démonstration de la surjectivité est décomposée en deux étapes:

1^{ère} **Étape:** On va démontrer que l'opérateur **div** défini sur $H^1(\Omega^F)^N$ à valeurs dans $L^2(\Omega^F)$ est surjectif. On va utiliser le résultat classique suivant:

On se donne: Ω^F polyèdre convexe si $N = 3$ ou polygone convexe si $N = 2$ et $q \in L^2(\Omega^F)$. Alors il existe une unique solution $u \in H^2(\Omega^F) \cap H_0^1(\Omega^F)$ pour le système:

$$(4.2.6) \quad \Delta u = q$$

Une démonstration de ce résultat se peut trouver dans Grisvard [1985].

On a $\Delta u = \mathbf{div}(\mathbf{grad} u)$ et on pose $\mathbf{grad} u = w^1$. Donc $w^1 \in H^1(\Omega^F)$.

2^{ème} **Étape:** Si Ω^S est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $\Gamma \cap \overline{\Sigma^1} = \emptyset$, alors pour chaque $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ on peut trouver $w^2 \in H^1(\Omega^S)$, tel que:

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} \gamma_\Gamma(w^2) = g \\ \gamma_{\Sigma^1}(w^2) = 0 \end{cases}$$

Ce résultat est basé sur le fait que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, on peut trouver $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega^S})$, tel que $\psi|_\Gamma = \phi$ et $\psi|_{\Sigma^1} = 0$. Ce fait est cité dans Dautray & Lions [1988, vol. 4, p. 1241]. En plus, $\mathcal{D}(\Gamma)$ est dense dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Ce résultat se peut trouver dans Dautray & Lions [1988, vol. 3, chap IV, p. 944].

Maintenant, on peut démontrer la surjectivité de B . Soit $(q, \mu) \in Q \times M$. Par la première étape, on sait qu'il existe $w^1 \in W^1$ tel que $\mathbf{div} w^1 = q$ et d'après la deuxième étape on peut trouver $w^2 \in W^2$ tel que:

$$(4.2.8) \quad \gamma_\Gamma(w^2) = -\mu + \gamma_0(w^1)$$

Continuité: On a

$$\|\mathbf{div} w^1\|_{0,\Omega^F} \leq c_1 \|w^1\|_{1,\Omega^F}$$

et d'après le théorème de trace

$$\|\gamma_0(w^1)\|_{1/2,\Gamma} \leq c_2 \|w^1\|_{1,\Omega^F}$$

$$\|\gamma_0(w^1)\|_{0,\Gamma} \leq c_3 \|w^1\|_{1,\Omega^F}$$

$$\|\gamma_\Gamma(w^2)\|_{1/2,\Gamma} \leq \|\gamma_0(w^2)\|_{1/2,\Gamma} \leq c_4 \|w^2\|_{1,\Omega^S}$$

$$\|\gamma_\Gamma(w^2)\|_{0,\Gamma} \leq \|\gamma_0(w^2)\|_{0,\Gamma} \leq c_5 \|w^2\|_{1,\Omega^S}$$

ce qui implique la conclusion concernant la continuité. \square

Remarque 4.2.1 Ce résultat reste valable même dans le cas $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Sigma}^1 \neq \emptyset$, i.e. seulement une partie de la frontière du fluide est en contact avec la structure, mais dans ce cas, il faut remplacer l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ par l'espace

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \left\{ v \in L^2(\Gamma); \exists w \in H^1(\Omega^S), w|_\Gamma = v, w|_{\Sigma^1} = 0 \right\}$$

muni de la norme quotient

$$\|v\| = \inf_{w \in H^1(\Omega^S), w|_\Gamma = v, w|_{\Sigma^1} = 0} \|w\|_{1,\Omega^S}$$

Pour plus de détails, voir Dautray & Lions [1988, vol. 4, chap VII].

Remarque 4.2.2 Si on remplace dans la définition de l'opérateur **div** l'espace $H^1(\Omega^F)^N$ par $H_0^1(\Omega^F)^N$, on perd la surjectivité. En revanche, on peut calculer explicitement le dual qui est l'opérateur **grad**.

On rappelle maintenant un résultat qui caractérise les opérateurs surjectifs.

Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire non-borné de E dans F

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F$$

où $D(A)$ est le domaine de A .

$$\mathbf{Graphe} \text{ de } A = G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$$

$$\mathbf{Image} \text{ de } A = R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

$$\mathbf{Noyau} \text{ de } A = N(A) = \{u \in D(A), Au = 0\} \subset E$$

Définition 4.2.1 On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Soit

$$D(A^*) = \{\nu \in F'; \exists c \geq 0, \forall u \in D(A), |\langle \nu, Au \rangle_{F', F}| \leq c \|u\|_E\}$$

Maintenant, on peut énoncer le résultat de caractérisation.

Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ et $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$ l'adjoint de A . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) A est surjectif
- b) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nu\| \leq C \|A^*\nu\| \quad \forall \nu \in D(A^*)$$

- c) $N(A^*) = \{0\}$ et $R(A^*)$ est fermé

On peut trouver une démonstration de ce résultat dans Brezis [1983, p. 29].

Proposition 4.2.3 *Sous les hypothèses de la proposition 4.2.2, on a la condition **inf-sup**, c'est-à-dire, il existe $\alpha > 0$ telle que:*

$$\begin{aligned} \forall q \in Q, \forall \mu \in M, \quad \alpha (\|q\|_{0,\Omega^F} + \|\mu\|_{1/2,\Gamma}) \\ \leq \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ (w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{|(\mathbf{div} w^1, q) + (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \mu)_{1/2,\Gamma}|}{(\|w^1\|_{1,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{1,\Omega^S}^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Démonstration: $X = W^1 \times W^2$ et $Y = Q \times M$ ce sont des espaces de Banach pour les normes:

$$\|(w^1, w^2)\| = \left(\|w^1\|_{1,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{1,\Omega^S}^2 \right)^{1/2}$$

et respectivement

$$\|(q, \mu)\| = \left(\|q\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\mu\|_{1/2,\Gamma}^2 \right)^{1/2}$$

Soit $B^* : Y' \rightarrow X'$, l'opérateur adjoint de B défini par:

$$(4.2.9) \quad \langle y, Bx \rangle_{Y', Y} = \langle B^* y, x \rangle_{X', X} \quad \forall x \in X, \forall y \in Y'$$

Soit $j : Y \rightarrow Y'$ l'isomorphisme de Riesz. Pour $y = j(q, \mu)$ et $x = (w^1, w^2)$ on a:

$$(4.2.10) \quad \langle y, Bx \rangle_{Y', Y} = (\mathbf{div} w^1, q) + (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \mu)_{1/2,\Gamma}$$

D'après le résultat qui caractérise les opérateurs surjectifs et à image fermée et la proposition 4.2.2 on a l'existence de $k > 0$ telle que:

$$(4.2.11) \quad \|B^* y\|_{X'} \geq k \|y\|_{Y'} = k \|j^{-1}(y)\|_Y$$

On a aussi, d'après la définition de la norme d'un opérateur linéaire borné:

$$(4.2.12) \quad \|B^* y\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle B^* y, x \rangle_{X'}}{\|x\|_X}$$

Dans l'espace Y , la norme euclidienne et la norme suivante:

$$(q, \mu) \rightarrow \|q\|_{0,\Omega^F} + \|\mu\|_{1/2,\Gamma}$$

sont équivalentes.

Il s'ensuit, d'après les relations (4.2.9)-(4.2.12) que l'on a l'inégalité annoncée. \square

Remarque 4.2.3 On ne peut pas obtenir l'inégalité de la proposition 4.2.3 écrite pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$ au lieu de $(\cdot, \cdot)_{1/2,\Gamma}$ en utilisant la même technique de démonstration, car $(H^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{0,\Gamma})$ n'est pas un espace de Banach et donc on peut pas utiliser le résultat qui caractérise les opérateurs surjectifs et à image fermée.

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses de la proposition 4.2.2, le problème semi-discrétisé a une solution unique.*

Démonstration : Puisque l'ouvert Ω^S est borné de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $mes(\Sigma^1) > 0$, grâce à l'inégalité de Korn, on obtient que l'application a_S est W^2 elliptique.

Maintenant, il est clair que l'application:

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par}$$

$$\begin{aligned} a((v, \nu); (w^1, w^2)) \\ = \frac{1}{\Delta t} (v, w^1)_{0,\Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v, w^1) + \frac{1}{\Delta t} (\nu, w^2)_{0,\Omega^S} + \frac{\Delta t}{2\rho^S} a_S(\nu, w^2) \end{aligned}$$

est X elliptique, car a_F est coercive et Δt et toutes les constantes sont positives. Maintenant, le théorème est une conséquence de la théorie de Babuska-Brezzi et de la proposition 4.2.2. \square

Remarque 4.2.4 Il suffit de montrer que l'opérateur a est V -elliptique, où $V = \text{Ker } B$.

4.3 Stabilité en temps du schéma semi-discrétisé

Dans Temam [1979], on peut trouver des résultats de stabilité concernant les fluides gouvernés par l'équation de Stokes.

On peut trouver dans Dautray & Lions [1988, vol. 9, chap. XX, p. 921] une démonstration de la stabilité du schéma de Newmark concernant le problème de la structure.

Dans cette section, on donne une démonstration originale pour la stabilité du problème fluide structure.

On fait les hypothèses suivantes:

Hypothèse 1

$$(f_1^n, f_2^n) = (f_1, f_2) \in H, \quad \forall n \geq 0$$

Hypothèse 2

Il existe K_1 une constante indépendante de Δt telle que:

$$\| \nu^1 \|_{1,\Omega^S} \leq K_1, \quad \forall \Delta t \leq T$$

Hypothèse 3

Il existe K_2 une constante indépendante de Δt telle que:

$$\left(\| v^1 - v^0 \|_{0,\Omega^F}^2 + \| \nu^1 - \nu^0 \|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \leq (\Delta t)K_2, \quad \forall \Delta t \leq T$$

Remarque 4.3.1 L'hypothèse 1 peut être considérée comme restrictive pour les problèmes réels, mais dans l'étude de la stabilité, les termes (f_1^n, f_2^n) n'interviennent pas d'une façon essentielle; plus précisément la stabilité d'un schéma récurrent linéaire, c'est-à-dire du type

$$X^{n+1} = AX^n + F^{n+1}$$

où A est un opérateur linéaire, ne dépend que de A .

Remarque 4.3.2 Dans les hypothèses 2 et 3 seul le premier pas de l'algorithme (4.1.2)-(4.1.4) intervient. Après la discrétisation en espace, les hypothèses 2 et 3 vont être vérifiées.

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, le schéma défini par (4.1.2)-(4.1.4) est inconditionnellement stable, dans le sens qu'il existe une constante K , indépendante de n et Δt , telle que:*

$$(4.3.1) \quad \|v^n\|_{1,\Omega^F} + \|\nu^n\|_{1,\Omega^S} + \|p^n\|_{0,\Omega^F} + \|\lambda^n\|_{1/2,\Gamma} \leq K,$$

$\forall n, \Delta t$ vérifiant $n(\Delta t) \leq T$

Démonstration: La démonstration est décomposée en trois étapes:

- 1) $\exists K_3 > 0$ telle que $\|v^n\|_{0,\Omega^F} + \|\nu^n\|_{0,\Omega^S} \leq K_3$
- 2) $\exists K_4 > 0$ telle que $\|v^n\|_{1,\Omega^F} + \|\nu^n\|_{1,\Omega^S} \leq K_4$
- 3) $\exists K_5 > 0$ telle que $\|p^n\|_{0,\Omega^F} + \|\lambda^n\|_{1/2,\Gamma} \leq K_5$

1^{ère} Etape: On écrit la relation (4.1.2) pour n , puis on l'extrait de la relation (4.1.2) écrite à l'ordre $n + 1$. On remplace w^1 par $v^{n+1} - v^n$ et w^2 par $\nu^{n+1} - \nu^n$. D'après (4.1.3) et (4.1.4) les termes qui contiennent p^n et λ^n disparaissent, ainsi que, d'après l'hypothèse 1, les termes qui contiennent f_1 et f_2 . On obtient donc:

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - v^n)_{0,\Omega^F} - \frac{1}{\Delta t}(v^n - v^{n-1}, v^{n+1} - v^n)_{0,\Omega^F} \\ & + \frac{1}{\Delta t}(\nu^{n+1} - \nu^n, \nu^{n+1} - \nu^n)_{0,\Omega^S} - \frac{1}{\Delta t}(\nu^n - \nu^{n-1}, \nu^{n+1} - \nu^n)_{0,\Omega^S} \\ & + \nu_{cin} a_F (v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - v^n) + \frac{\Delta t}{2\rho^S} a_S (\nu^{n+1} + \nu^n, \nu^{n+1} - \nu^n) = 0 \end{aligned}$$

Si on utilise deux fois l'égalité $2(a, a - b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a - b\|^2$ avec $a = v^{n+1} - v^n$ (resp $a = v^n - v^{n-1}$) et $b = \nu^{n+1} - \nu^n$ (resp $b = \nu^n - \nu^{n-1}$), on obtient les deux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} & 2(v^{n+1} - v^n, v^{n+1} - v^n)_{0,\Omega^F} - 2(v^n - v^{n-1}, v^{n+1} - v^n)_{0,\Omega^F} \\ & = \|v^{n+1} - v^n\|_{0,\Omega^F}^2 - \|v^n - v^{n-1}\|_{0,\Omega^F}^2 \\ & \quad + \|v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}\|_{0,\Omega^F}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & 2(\nu^{n+1} - \nu^n, \nu^{n+1} - \nu^n)_{0,\Omega^S} - 2(\nu^n - \nu^{n-1}, \nu^{n+1} - \nu^n)_{0,\Omega^S} \\ &= \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 - \|\nu^n - \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^S}^2 \\ & \quad + \|\nu^{n+1} - 2\nu^n + \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^S}^2 \end{aligned}$$

Puisque a_S est symétrique, on a:

$$a_S(\nu^{n+1} + \nu^n, \nu^{n+1} - \nu^n) = a_S(\nu^{n+1}, \nu^{n+1}) - a_S(\nu^n, \nu^n)$$

D'après (4.3.2) et les relations précédentes, on obtient:

$$\begin{aligned} (4.3.3) \quad & \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - 2\nu^n + \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^F}^2 \\ & + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 + \|\nu^{n+1} - 2\nu^n + \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^S}^2 \\ & + 2\nu_{cin}(\Delta t)a_F(\nu^{n+1} - \nu^n, \nu^{n+1} - \nu^n) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^{n+1}, \nu^{n+1}) \\ & \leq \|\nu^n - \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^n - \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^S}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^n, \nu^n) \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $a_F(v, v) \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned} (4.3.4) \quad & \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^{n+1}, \nu^{n+1}) \\ & \leq \|\nu^n - \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^n - \nu^{n-1}\|_{0,\Omega^S}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^n, \nu^n) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} (4.3.5) \quad & \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^{n+1}, \nu^{n+1}) \\ & \leq \|\nu^1 - \nu^0\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^1 - \nu^0\|_{0,\Omega^S}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S}a_S(\nu^1, \nu^1) \end{aligned}$$

D'après les hypothèses 2 et 3 on a:

$$(4.3.6) \quad \left(\|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \leq (\Delta t)K_3, \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

En utilisant l'inégalité du triangle, on peut écrire:

$$\begin{aligned} (4.3.7) \quad & \left(\|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} - \left(\|\nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

D'après (4.3.6) et (4.3.7) on obtient:

$$(4.3.8) \quad \left(\|v^{n+1}\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} - \left(\|v^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \leq (\Delta t)K_3$$

pour $n = 0, 1, \dots$

On écrit (4.3.8) par $n = 0, 1, \dots$ et après sommation en n on obtient:

$$(4.3.9) \quad \left(\|v^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} - \left(\|v^0\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^0\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \leq (n\Delta t)K_3$$

Mais $n\Delta t \leq T$ ce qui termine la première étape.

2^{ème} Etape:

D'après (4.3.5) et les hypothèses 2 et 3 on a:

$$(4.3.10) \quad \frac{(\Delta t)^2}{\rho^S} a_S(\nu^{n+1}, \nu^{n+1}) \leq (\Delta t)^2 K_3$$

Mais a_S est W^2 -elliptique, donc il existe une constante K_6 telle que:

$$(4.3.11) \quad \|\nu^{n+1}\|_{1,\Omega^S} \leq K_6$$

Si on écrit la relation (4.1.2) pour $w^1 = v^{n+1}$ et $w^2 = \nu^{n+1}$ on obtient:

$$(4.3.12) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n, v^{n+1})_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} (\nu^{n+1} - \nu^n, \nu^{n+1})_{0,\Omega^S} + \nu_{cin} a_F(v^{n+1}, v^{n+1}) \\ & + \frac{1}{\rho^S} a_S \left(u_0 + \frac{\Delta t}{2} (\nu^0 + 2(\sum_{i=1}^n \nu^i) + \nu^{n+1}), \nu^{n+1} \right) \\ & = (f_1, v^{n+1})_{0,\Omega^F} + (f_2, \nu^{n+1})_{0,\Omega^S} \end{aligned}$$

On a les inégalités suivantes:

$$(4.3.13) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n, v^{n+1})_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} (\nu^{n+1} - \nu^n, \nu^{n+1})_{0,\Omega^S} \\ & \leq \frac{1}{\Delta t} \|v^{n+1} - v^n\|_{0,\Omega^F} \|v^{n+1}\|_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S} \|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^S} \\ & \leq \frac{1}{\Delta t} \left(\|v^{n+1} - v^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \left(\|v^{n+1}\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq K_7 \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité on a utilisé (4.3.6) et la conclusion de la première étape.

Aussi, par la première étape on a:

$$(4.3.14) \quad \begin{aligned} & (f_1, v^{n+1})_{0,\Omega^F} + (f_2, \nu^{n+1})_{0,\Omega^S} \\ & \leq \|f_1\|_{0,\Omega^F} \|v^{n+1}\|_{0,\Omega^F} + \|f_2\|_{0,\Omega^S} \|\nu^{n+1}\|_{0,\Omega^S} \leq K_8 \end{aligned}$$

Puisque a_S est continue, on a:

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} & a_S\left(u_0 + \frac{\Delta t}{2}(\nu^0 + 2\left(\sum_{i=1}^n \nu^i\right) + \nu^{n+1}), \nu^{n+1}\right) \\ & \leq M \|\nu^{n+1}\|_{1,\Omega^S} \left(\|u_0\|_{1,\Omega^S} + (n+1)(\Delta t)K_6\right) \\ & \leq MK_6\left(\|u_0\|_{1,\Omega^S} + TK_6\right) \end{aligned}$$

Si l'on injecte les inégalités (4.3.13)-(4.3.15) dans la relation (4.3.12), alors il existe une constante K_{10} telle que:

$$\nu_{cin} a_F(v^{n+1}, v^{n+1}) \leq K_{10}$$

Enfin, en utilisant la coercivité de a_F et le fait que $\|\nu^{n+1}\|_{1,\Omega^S}$ est borné, on a le résultat annoncé pour la deuxième étape.

3^{ème} Etape:

L'égalité (4.1.2) peut être écrite sous la forme équivalente suivante:

$$(4.3.16) \quad \begin{aligned} & (\operatorname{div} w^1, p^{n+1})_{0,\Omega^F} + \left(\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda^{n+1}\right)_{1/2,\Gamma} \\ & = \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1} - v^n, w^1)_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t}(\nu^{n+1} - \nu^n, w^2)_{0,\Omega^S} \\ & + \nu_{cin} a_F(v^{n+1}, w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S\left(u_0 + \frac{\Delta t}{2}(\nu^0 + 2\left(\sum_{i=1}^n \nu^i\right) + \nu^{n+1}), w^2\right) \\ & - (f_1^{n+1}, w^1)_{0,\Omega^F} - (f_2^{n+1}, w^2)_{0,\Omega^S} \end{aligned}$$

On a:

$$(4.3.17) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1} - v^n, w^1)_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t}(\nu^{n+1} - \nu^n, w^2)_{0,\Omega^S} \\ & \leq \frac{1}{\Delta t} \|v^{n+1} - v^n\|_{0,\Omega^F} \|w^1\|_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S} \|w^2\|_{0,\Omega^S} \\ & \leq \frac{1}{\Delta t} \left(\|v^{n+1} - v^n\|_{0,\Omega^F}^2 + \|\nu^{n+1} - \nu^n\|_{0,\Omega^S}^2\right)^{1/2} \left(\|w^1\|_{0,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{0,\Omega^S}^2\right)^{1/2} \\ & \leq K_3 \left(\|w^1\|_{0,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{0,\Omega^S}^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Pour les inégalités (4.3.17), on a utilisé l'inégalité

$$(ax + by) \leq (a^2 + b^2)^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

et l'inégalité (4.3.6).

Puisque a_F, a_S sont continues et d'après le fait que $\|v^{n+1}\|_{1,\Omega^F}$ et $\|u_0 + \frac{\Delta t}{2}(\nu^0 + 2(\sum_{i=1}^n \nu^i) + \nu^{n+1})\|_{1,\Omega^S}$ sont bornées, on obtient :

$$(4.3.18) \quad \begin{aligned} & \nu_{cin} a_F(v^{n+1}, w^1) + \frac{1}{\rho^S} a_S\left(u_0 + \frac{\Delta t}{2}(\nu^0 + 2(\sum_{i=1}^n \nu^i) + \nu^{n+1}), w^2\right) \\ & \leq K_{11} \left(\|w^1\|_{0,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 1, on a:

$$(4.3.19) \quad \begin{aligned} & -(f_1^{n+1}, w^1)_{0,\Omega^F} - (f_2^{n+1}, w^2)_{0,\Omega^S} \\ & \leq K_{12} \left(\|w^1\|_{0,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{0,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

En introduisant dans l'égalité (4.3.16), les inégalités (4.3.17), (4.3.18) et (4.3.19), on obtient:

$$(4.3.20) \quad \begin{aligned} & (\mathbf{div} w^1, p^{n+1})_{0,\Omega^F} + \left(\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \lambda^{n+1} \right)_{1/2,\Gamma} \\ & \leq K_{13} \left(\|w^1\|_{1,\Omega^F}^2 + \|w^2\|_{1,\Omega^S}^2 \right)^{1/2} \quad \forall w^1 \in W^1, \forall w^2 \in W^2 \end{aligned}$$

Enfin, d'après la proposition 4.2.3 et l'inégalité précédente, on obtient:

$$\|p^{n+1}\|_{0,\Omega^F} + \|\lambda^{n+1}\|_{1/2,\Gamma} \leq K_{14}$$

□

Chapitre 5

Discrétisation en espace, procédures numériques

Dans la première section, on construit des espaces vectoriels de dimension finie, à partir des éléments finis de type mixte, tels que le problème complètement discrétisé soit bien posé.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème complètement discrétisé, on utilise la théorie de Babuska [1971] et Brezzi [1974]. On construit un opérateur d'interpolation et en utilisant le fait que la condition *inf-sup* continue a lieu, on montre que la condition *inf-sup* discrète a lieu.

Un schéma numérique pour la résolution du problème fluide structure est présenté. A chaque pas de temps, il faut résoudre un système linéaire symétrique et non elliptique.

Dans la deuxième section, on présente un algorithme convergent pour la résolution découplée fluide structure de ce système linéaire.

Dans la troisième section, la stabilité en temps du schéma complètement discrétisé est démontrée.

5.1 Discrétisation en espace à l'aide d'éléments finis mixtes

5.1.1 Présentation du problème discret

On discrétise en espace le problème semi-discrétisé en temps présenté au chapitre précédent.

Soient Ω^F et Ω^S deux ouverts bornés de \mathbb{R}^N , où $N = 2$ ou 3 , de frontières lipschitziennes, tels que $\overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} = \overline{\Gamma}$ et $\partial\Omega^S = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Sigma^1} \cup \overline{\Sigma^2}$.

Notons

$$W^1 = H^1(\Omega^F)^N$$

$$W^2 = \{w^2 \in H^1(\Omega^S)^N, w^1 = 0 \text{ sur } \Sigma^1\}$$

$$Q = L^2(\Omega^F)$$

$$M = H^{1/2}(\Gamma)^N$$

Soient $W_h^1 \subseteq W^1$, $W_h^2 \subseteq W^2$, $Q_h \subseteq Q$ et $M_h \subseteq M$ quatre espaces vectoriels de dimension finie NW1, NW2, NQ, NM, qui admettent comme bases respectivement:

$$\{\overline{\phi}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq NW1}, \{\overline{\psi}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq NW2}, \{\chi_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq NQ}, \{\overline{\eta}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq NM}.$$

On fait les notations suivantes:

$$(5.1.1) \quad (u, v)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

$$(5.1.2) \quad (\overline{u}, \overline{v})_{0, \Omega} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u^i(x) v^i(x) dx$$

où $\overline{u} = (u^i)_{1 \leq i \leq N}$, $\overline{v} = (v^i)_{1 \leq i \leq N}$, $u^i, v^i \in L^2(\Omega)$.

Pour le problème du fluide, on utilise les notations:

$$(5.1.3) \quad \begin{aligned} M_h^F, K_h^F &\in \mathcal{M}_{NW1}(\mathbb{R}) \quad \text{définies par} \\ M_h^F &= \left\{ (\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_j)_{0, \Omega^F} \right\}_{1 \leq i, j \leq NW1} \\ K_h^F &= \left\{ a_F(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_j) \right\}_{1 \leq i, j \leq NW1} \end{aligned}$$

où a_F est l'application définie par:

$$(5.1.4) \quad \begin{cases} a_F : W^1 \times W^1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ a_F(v, w^1) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^F} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i^1}{\partial x_j} dx \end{cases}$$

Cette application est symétrique, bilinéaire, continue et vérifie l'égalité:

$$(5.1.5) \quad a_F(v, v) + (v, v)_{0, \Omega^F} = (v, v)_{1, \Omega^F}$$

Pour le problème de la structure, on utilise les notations:

$$(5.1.6) \quad \begin{aligned} M_h^S, K_h^S &\in \mathcal{M}_{NW2}(\mathbb{R}) \quad \text{définies par} \\ M_h^S &= \left\{ (\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j)_{0, \Omega^S} \right\}_{1 \leq i, j \leq NW2} \\ K_h^S &= \left\{ a_S(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j) \right\}_{1 \leq i, j \leq NW2} \end{aligned}$$

où a_S est l'application définie par

$$(5.1.7) \quad \begin{cases} a_S : W^2 \times W^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ a_S(\nu, w^2) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega^S} \sigma_{ij}(\nu) \epsilon_{ij}(w^2) dx, \end{cases}$$

$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $\sigma_{ij}(u) = \lambda^S (\sum_{k=1}^N \epsilon_{kk}(u)) + 2\mu^S \epsilon_{ij}(u)$ et $\lambda^S \geq 0, \mu^S > 0$. Cette application est symétrique, bilinéaire, continue. Grâce à l'inégalité de Korn, si Ω^S est de classe \mathcal{C}^1 et $mes(\Sigma^1) > 0$, alors elle est W^2 elliptique. Une démonstration de ce résultat se trouve dans Duvaut [1990, chap. 5 et 6].

Soit $\{a_{\Delta t}\}_{\Delta t > 0}$ la famille d'applications définie par

$$(5.1.8) \quad \begin{aligned} a_{\Delta t} : (W^1 \times W^2) \times (W^1 \times W^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a_{\Delta t}((v, \nu); (w^1, w^2)) &= \frac{1}{\Delta t} (v, w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F(v, w^1) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} (\nu, w^2)_{0, \Omega^S} + \frac{\Delta t}{2\rho} a_S(\nu, w^2) \end{aligned}$$

où ν_{cin} est la viscosité cinématique du fluide et ρ est la masse volumique de la structure.

Soit b l'application définie par

$$(5.1.9) \quad b : (W^1 \times W^2) \times (Q \times M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b((w^1, w^2); (q, \mu)) = -(\mathbf{div} w^1, q)_{0, \Omega^F} - (\gamma_0(w^1) - \gamma_\Gamma(w^2), \mu)_{1/2, \Gamma}$$

où

$\gamma_0 : H^1(\Omega^F)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$ est l'application trace

$\gamma_\Gamma : H^1(\Omega^S)^N \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)^N$ est la restriction de l'application trace sur Γ .

$$(5.1.10) \quad B_{11}^t \in \mathcal{M}_{NW1, NQ}(\mathbb{R})$$

$$B_{11}^t = \left\{ -(\mathbf{div} \bar{\phi}_i, \chi_j)_{0, \Omega^F} \right\}, 1 \leq i \leq NW1, 1 \leq j \leq NQ$$

$$(5.1.11) \quad B_{12}^t \in \mathcal{M}_{NW2, NQ}(\mathbb{R})$$

$$B_{12}^t = 0$$

$$(5.1.12) \quad B_{21}^t \in \mathcal{M}_{NW1, NM}(\mathbb{R})$$

$$B_{21}^t = \left\{ -(\gamma_0(\bar{\phi}_i), \bar{\eta}_j)_{1/2, \Gamma} \right\}, 1 \leq i \leq NW1, 1 \leq j \leq NM$$

$$(5.1.13) \quad B_{22}^t \in \mathcal{M}_{NW2, NM}(\mathbb{R})$$

$$B_{22}^t = \left\{ (\gamma_\Gamma(\bar{\psi}_i), \bar{\eta}_j)_{1/2, \Gamma} \right\}, 1 \leq i \leq NW2, 1 \leq j \leq NM$$

$$(5.1.14) \quad B \in \mathcal{M}_{NQ+NM, NW1+NW2}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Soient $f_1^n \in L^2(\Omega^F)^N$ et $f_2^n \in L^2(\Omega^S)^N$, $n > 0$ des approximations pour les forces externes qui agissent respectivement dans le fluide et dans la structure, à l'instant $n\Delta t$.

Avec toutes ces notations, on peut écrire le problème discret.

En remplaçant dans le problème semi-discrétisé en temps introduit dans le chapitre précédent, les espaces W^1 , W^2 , Q , M par les espaces de dimension finie W_h^1 , W_h^2 , Q_h , M_h , on obtient le problème discret suivant:

Etant donnés:

1. $\rho > 0$ la masse volumique de la structure
2. $\nu_{cin} > 0$ la viscosité cinématique du fluide
3. $v_h^n \in W_h^1$ la vitesse du fluide au pas de temps n
4. $\nu_h^0, \nu_h^1, \dots, \nu_h^n \in W_h^2$ les vitesses de la structure
5. $v_h^n = \nu_h^n$ sur Γ
6. $u_h^0 \in W_h^2$ le déplacement initial de la structure

Trouver $(v_h^{n+1}, \nu_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \lambda_h^{n+1}) \in W_h^1 \times W_h^2 \times Q_h \times M_h$, tels que:

$$(5.1.15) \quad \begin{pmatrix} A_{h,\Delta t}^F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_{h,\Delta t}^S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & & 0 \\ B_{21} & B_{22} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h^{n+1} \\ \nu_h^{n+1} \\ p_h^{n+1} \\ \lambda_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{1,n+1} \\ F^{2,n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$A_{h,\Delta t}^F = \frac{1}{\Delta t} M_h^F + \nu_{cin} K_h^F$$

$$A_{h,\Delta t}^S = \frac{1}{\Delta t} M_h^S + \frac{\Delta t}{2\rho} K_h^S$$

et les vecteurs $F^{1,n+1} \in R^{NW1}$ et $F^{2,n+1} \in R^{NW2}$ sont donnés par les relations:

$$(5.1.16) \quad F^{1,n+1} = (F_1^{1,n+1}, F_2^{1,n+1}, \dots, F_{NW1}^{1,n+1})^t$$

$$F_i^{1,n+1} = (f_1^{n+1}, \bar{\phi}_i)_{0,\Omega^F} + \frac{1}{\Delta t} (v_h^n, \bar{\phi}_i)_{0,\Omega^F}, i = 1, \dots, NW1$$

$$(5.1.17) \quad F^{2,n+1} = (F_1^{2,n+1}, F_2^{2,n+1}, \dots, F_{NW2}^{2,n+1})^t$$

$$F_i^{2,n+1} = (f_2^{n+1}, \bar{\psi}_i)_{0,\Omega^S} + \frac{1}{\Delta t} (\nu_h^n, \bar{\psi}_i)_{0,\Omega^S}$$

$$-\frac{1}{\rho} a_S \left(u_h^0 + \frac{\Delta t}{2} \left(\nu_h^0 + 2 \sum_{k=1}^n \nu_h^k \right), \bar{\psi}_i \right), i = 1, \dots, NW2$$

Remarque 5.1.1 A chaque pas en temps, il faut résoudre le système linéaire (5.1.15), ce qui représente le schéma numérique pour le problème fluide structure.

5.1.2 Existence et unicité pour le problème discret

Des conditions suffisantes d'existence et unicité du système (5.1.15) ont été données par Babuska [1971] et Brezzi [1974]. Dans le cas de notre problème, le résultat d'existence et d'unicité qui se trouve dans Brezzi [1974] a la forme suivante:

Théorème 5.1.1 *Soient $a_{\Delta t}, b$ les formes bilinéaires données par (5.1.8), (5.1.9) et W_h^1, W_h^2, Q_h, M_h quatre espaces de dimension finie, tels que:*

$$W_h^1 \subseteq W^1, W_h^2 \subseteq W^2, Q_h \subseteq Q, M_h \subseteq M.$$

Soit Δt un réel strictement positif. S'il existe $\alpha_{\Delta t} > 0$ et $\beta > 0$, tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées

$$(5.1.18) \quad \inf_{\substack{(w_h^1, w_h^2) \in W_h^1 \times W_h^2 \\ (w_h^1, w_h^2) \neq (0,0)}} \frac{a_{\Delta t}((w_h^1, w_h^2); (w_h^1, w_h^2))}{\|(w_h^1, w_h^2)\|_{W^1 \times W^2}^2} \geq \alpha_{\Delta t}$$

$$(5.1.19) \quad \inf_{\substack{(q_h, \mu_h) \in Q_h \times M_h \\ (q_h, \mu_h) \neq (0,0)}} \sup_{\substack{(w_h^1, w_h^2) \in W_h^1 \times W_h^2 \\ (w_h^1, w_h^2) \neq (0,0)}} \frac{b((w_h^1, w_h^2); (q_h, \mu_h))}{\|(w_h^1, w_h^2)\|_{W^1 \times W^2} \|(q_h, \mu_h)\|_{Q \times M}} \geq \beta$$

alors le système (5.1.15) a une unique solution.

Remarque 5.1.2 L'inégalité (5.1.19) s'appelle la condition *inf-sup* discrète.

On s'occupe maintenant de la relation (5.1.18).

Proposition 5.1.1 *Si Ω^F et Ω^S sont deux ouverts bornés de \mathbb{R}^N , où $N = 2$ ou 3 , Ω^S de classe C^1 , tels que $\overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} = \overline{\Gamma}$, $\partial\Omega^S = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Sigma^1} \cup \overline{\Sigma^2}$ et $\text{mes}(\Sigma^1) > 0$, alors pour tout $\Delta t > 0$ et pour tout $W_h^1 \subseteq W^1, W_h^2 \subseteq W^2$, l'inégalité (5.1.18) a lieu.*

Démonstration: La forme a_F est bilinéaire, symétrique, continue et vérifie l'égalité (5.1.5). Alors

$$(5.1.20) \quad \forall w^1 \in W^1, \quad \frac{1}{\Delta t} (w^1, w^1)_{0, \Omega^F} + \nu_{cin} a_F (w^1, w^1) \geq \min \left\{ \frac{1}{\Delta t}, \nu_{cin} \right\} (w^1, w^1)_{1, \Omega^F}$$

La forme a_S est bilinéaire, symétrique, continue. Grâce à l'inégalité de Korn, sous les hypothèses Ω^S de classe \mathcal{C}^1 et $mes(\Sigma^1) > 0$, alors a_S est W^2 elliptique, i.e.

$$\exists \alpha_S > 0, \forall w^2 \in W^2, a_S(w^2, w^2) \geq \alpha_S \|w^2\|_{1, \Omega^S}^2$$

d'où

$$(5.1.21) \quad \forall w^2 \in W^2, \frac{1}{\Delta t} (w^2, w^2)_{0, \Omega^F} + \frac{\Delta t}{2\rho} a_S(w^2, w^2) \geq \frac{\alpha_S \Delta t}{2\rho} (w^2, w^2)_{1, \Omega^S}$$

Si on pose

$$\alpha_{\Delta t} = \min \left\{ \frac{1}{\Delta t}, \nu_{cin}, \frac{\alpha_S \Delta t}{2\rho} \right\}$$

d'après (5.1.20) et (5.1.21), on obtient

$$\forall (w^1, w^2) \in W^1 \times W^2, a_{\Delta t}((w^1, w^2); (w^1, w^2)) \geq \alpha_{\Delta t} \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}^2$$

Puisque $W_h^1 \subseteq W^1, W_h^2 \subseteq W^2$, on obtient (5.1.18). \square

On s'occupe maintenant de l'inégalité (5.1.19), qui représente la condition *inf-sup* discrète pour notre problème.

Dans le chapitre précédent, on a démontré que la condition *inf-sup* continue a lieu. On utilise ce résultat pour obtenir l'inégalité (5.1.19).

Proposition 5.1.2 *Si la condition inf-sup continue a lieu et s'il existe un opérateur bilinéaire*

$$\Pi_h : W^1 \times W^2 \rightarrow W_h^1 \times W_h^2$$

tel que

$$(5.1.22) \quad \begin{cases} \exists c > 0, \forall (w^1, w^2) \in W^1 \times W^2, \\ \|\Pi_h(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2} \leq c \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2} \end{cases}$$

$$(5.1.23) \quad \begin{cases} \forall (w^1, w^2) \in W^1 \times W^2, \forall (q_h, \mu_h) \in Q_h \times M_h, \\ b((w^1, w^2) - \Pi_h(w^1, w^2); (q_h, \mu_h)) = 0 \end{cases}$$

où b est donnée par (5.1.9), alors la condition *inf-sup* discrète (5.1.19) a lieu.

Démonstration: Soit $(q_h, \mu_h) \in Q_h \times M_h$.

Puisque $\Pi_h(w^1, w^2) \in W_h^1 \times W_h^2$, alors

$$(5.1.24) \quad \begin{aligned} & \sup_{\substack{(w_h^1, w_h^2) \in W_h^1 \times W_h^2 \\ (w_h^1, w_h^2) \neq (0,0)}} \frac{b((w_h^1, w_h^2); (q_h, \mu_h))}{\|(w_h^1, w_h^2)\|_{W^1 \times W^2}} \\ & \geq \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{b(\Pi_h(w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{\|\Pi_h(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (5.1.23), on obtient

$$(5.1.25) \quad \begin{aligned} & \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{b(\Pi_h(w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{\|\Pi_h(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \\ & = \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{\|\Pi_h(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \end{aligned}$$

Puisque Π_h est bilinéaire, on a

$$\Pi_h(w^1, w^2) \neq (0, 0) \Rightarrow (w^1, w^2) \neq (0, 0)$$

et en utilisant l'hypothèse (5.1.22), on obtient

$$(5.1.26) \quad \begin{aligned} & \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{\|\Pi_h(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \\ & \geq \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0,0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{c \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \end{aligned}$$

Pour (q_h, μ_h) fixé, soit $f : W^1 \times W^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(w^1, w^2) = \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{c \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}}$$

Soient

$$\begin{aligned} A &= \{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2; \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0, 0)\} \\ B &= \{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2; \Pi_h(w^1, w^2) = (0, 0) \text{ et } (w^1, w^2) \neq (0, 0)\} \end{aligned}$$

Alors $W^1 \times W^2 \setminus \{(0, 0)\} = A \cup B$ et on a l'égalité

$$\sup_{A \cup B} f = \max \left\{ \sup_A f, \sup_B f \right\}$$

Sous l'hypothèse (5.1.23), on a

$$\forall (w^1, w^2) \in B, f(w^1, w^2) = 0$$

d'où

$$\sup_{A \cup B} f = \max \left\{ \sup_A f, 0 \right\}$$

Mais on a la propriété

$$\begin{aligned} \forall (w^1, w^2) \in A &\Rightarrow (-w^1, w^2) \in A \\ -f(w^1, w^2) &= f(-w^1, w^2) \end{aligned}$$

d'où $\sup_A f \geq 0$, ce qui implique

$$\sup_{A \cup B} f = \sup_A f$$

ou d'une façon équivalente

$$\begin{aligned} (5.1.27) \quad & \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) \neq (0, 0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{c \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \\ &= \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ (w^1, w^2) \neq (0, 0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q_h, \mu_h))}{c \|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \end{aligned}$$

D'après la condition *inf-sup* continue, on a

$$(5.1.28) \quad \begin{aligned} & \exists \bar{\beta} > 0, \forall (q, \mu) \in Q \times M \\ & \sup_{\substack{(w^1, w^2) \in W^1 \times W^2 \\ (w^1, w^2) \neq (0, 0)}} \frac{b((w^1, w^2); (q, \mu))}{\|(w^1, w^2)\|_{W^1 \times W^2}} \geq \bar{\beta} \|(q, \mu)\|_{Q \times M} \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (5.1.24) – (5.1.28), on obtient la condition *inf-sup* discrète (5.1.19). \square

5.1.3 Choix d'éléments finis et construction des espaces de dimension finie

D'après le résultat du paragraphe précédent, pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème discret, il nous reste à trouver les espaces de dimension finie $W_h^1 \subseteq W^1$, $W_h^2 \subseteq W^2$, $Q_h \subseteq Q$, $M_h \subseteq M$ et l'opérateur bilinéaire Π_h qui vérifie les relations (5.1.22) et (5.1.23).

Soient Ω^F et Ω^S deux ouverts polyédriques dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire deux réunions finies de polyèdres de \mathbb{R}^3 . On rappelle qu'un polyèdre de \mathbb{R}^3 est une intersection finie de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^3 .

On considère les décompositions finies

$$\Omega^F = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^F} K \text{ et } \Omega^S = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^S} K$$

telles que

1. chaque élément K est un tétraèdre non vide
2. les intérieurs de deux tétraèdres distincts de $\mathcal{T}_h^F \cup \mathcal{T}_h^S$ sont disjoints
3. toute face d'un tétraèdre $K_1 \in \mathcal{T}_h^F$ est soit face d'un autre tétraèdre $K_2 \in \mathcal{T}_h^F$, auquel cas K^1 et K^2 sont dits adjacents, soit une partie de la frontière $\partial\Omega^F$
4. toute face d'un tétraèdre $K_1 \in \mathcal{T}_h^S$ est soit face d'un autre tétraèdre $K_2 \in \mathcal{T}_h^S$, soit une partie de la frontière $\partial\Omega^S$
5. notons

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h^F \cup \mathcal{T}_h^S} h_K$$

où h_K est le diamètre du tétraèdre K

6. les domaines Ω^F et Ω^S sont en contact, plus précisément

$$\overline{\Omega^F} \cap \overline{\Omega^S} = \overline{\Gamma}, \quad \partial\Omega^S = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Sigma^1} \cup \overline{\Sigma^2}$$

et on suppose que $\overline{\Gamma}$ est une réunion finie de triangles de \mathbb{R}^3 , telle que pour chaque triangle T , il existe deux tétraèdres $K_1 \in \mathcal{T}_h^F$ et $K_2 \in \mathcal{T}_h^S$ pour lesquels T est une face aussi bien de K_1 , que de K_2 .

Remarque 5.1.3 Le point no. 6 représente la seule condition de compatibilité entre Ω^F et Ω^S .

Nous allons construire les espaces de dimension finie par la méthode d'éléments finis. Auparavant, on rappelle les coordonnées barycentriques d'un point par rapport aux sommets d'un tétraèdre.

On considère quatre points $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq j \leq 4$, non situés dans un même plan, c'est-à-dire tel que la matrice d'ordre 4 suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit inversible. Tout point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est caractérisé par les scalaires $\lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, définis comme solution du système linéaire

$$(5.1.29) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \\ \lambda_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces scalaires $\lambda_j(x)$ sont appelés les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux points $a_j \in \mathbb{R}^3, 1 \leq j \leq 4$. D'après (5.1.29), chacun de ces scalaires est une fonction affine de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x) a_j = x$$

A l'aide de ces coordonnées barycentriques, le tétraèdre K de sommets $a_j, 1 \leq j \leq 4$ est caractérisé par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3; 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, 1 \leq j \leq 4\}$$

En plus, on a

$$\overset{\circ}{K} = \{x \in \mathbb{R}^3; 0 < \lambda_j(x) < 1, 1 \leq j \leq 4\}$$

et si $\lambda_j(x) = 0$, alors le point x et les trois sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \setminus \{a_j\}$ sont situés dans le même plan.

Pour le tétraèdre K , on définit la fonction bulle

$$(5.1.30) \quad b_K : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b_K(x) = \begin{cases} \lambda_1(x) \lambda_2(x) \lambda_3(x) \lambda_4(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}$$

qui a les propriétés suivantes

$$\begin{cases} b_K(x) > 0, & \forall x \in \overset{\circ}{K} \\ b_K(x) = 0, & \forall x \in \partial K \\ b_K(x) = 0, & \forall x \notin K \end{cases}$$

Si $a_5 \in \mathbb{R}^3$ est le barycentre de K , c'est-à-dire

$$a_5 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

alors on a $\lambda_j(a_5) = 1/4, 1 \leq j \leq 4$, donc

$$b_K(a_5) = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

Notons

$$P_1(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, p(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Il est bien connu (voir par exemple Raviart & Thomas [1992]) que le triplet

$$(K, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, P_1(K))$$

est un élément fini.

Notons

$$P_1(K) + b_K = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d + eb_K(x), a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Proposition 5.1.3 *Le triplet*

$$(K, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, P_1(K) + b_K)$$

est un élément fini.

Démonstration: Soient $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq 5$. On démontre qu'il existe une fonction unique $p \in P_1(K) + b_K$, telle que

$$(5.1.31) \quad p(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq 5$$

La fonction p a la forme

$$p(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d + eb_K(x), \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

Puisque $b_K(a_j) = 0, 1 \leq j \leq 4$ le système (5.1.31) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} A^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \\ aa_{15} + ba_{25} + ca_{35} + d + eb_K(a_5) = \alpha_5 \end{array} \right.$$

où $a_5 = (a_{15}, a_{25}, a_{35})$. Mais la matrice A est inversible et $b_K(a_5) = (1/4)^4$, donc la solution unique du système (5.1.31) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (A^t)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \\ e = 4^4 (\alpha_5 - aa_{15} + ba_{25} + ca_{35} + d) \end{array} \right.$$

d'où la conclusion de cette proposition. \square

On peut maintenant construire les espaces de dimension finie.

On pose

$$W_h^1 = \left\{ w_h^1 = \left(w_h^{1,1}, w_h^{1,2}, w_h^{1,3} \right); w_h^{1,i} \in \mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega^F} \right), w_h^{1,i} |_{K \in P_1(K)} \in P_1(K) + b_K, 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

$$W_h^2 = \left\{ w_h^2 = \left(w_h^{2,1}, w_h^{2,2}, w_h^{2,3} \right); w_h^{2,i} \in \mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega^S} \right), w_h^{2,i} |_{K \in P_1(K)} \in P_1(K), 1 \leq i \leq 3, w_h^{2,i} |_{\Sigma^1} = 0 \right\}$$

$$Q_h = \left\{ q_h \in \mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega^F} \right), q_h |_{K \in P_1(K)} \in P_1(K), q_h |_{\partial\Omega^F} = 0 \right\}$$

Pour tout T triangle dans \mathbb{R}^3 , notons $P_1(T)$ l'ensemble de polynômes de T dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à 1. La dimension de l'espace $P_1(T)$ est 3.

On pose

$$M_h = \left\{ \mu_h = \left(\mu_h^1, \mu_h^2, \mu_h^3 \right); \mu_h^i \in \mathcal{C}^0 \left(\overline{\Gamma} \right), \mu_h^i |_{T \in P_1(T)} \in P_1(T), 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

Puisque $\mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega^F} \right) \subseteq L^2 \left(\overline{\Omega^F} \right)$, alors $Q_h \subseteq Q$.

Pour démontrer les inclusions $W_h^1 \subseteq W^1, W_h^2 \subseteq W^2$ et $M_h \subseteq M$, on utilise le résultat suivant:

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , tel que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \overline{\Omega}_r$$

Ω_r ouvert borné de frontière \mathcal{C}^1 par morceaux, $r = 1, \dots, R$

$$\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset, \quad r \neq s$$

Soit w dans $\mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega} \right)$, tel que $w |_{\Omega_r}$ appartient à $H^1 \left(\Omega_r \right)$ pour tout $r = 1, \dots, R$. Alors w appartient à $H^1 \left(\Omega \right)$.

Ce résultat est démontré, par exemple dans Raviart & Thomas [1992, p. 27].

Dans notre cas, on a $w_h^{1,i} |_{K \in P_1(K)} \in P_1(K) + b_K \subseteq H^1 \left(\overset{\circ}{K} \right)$ et $w_h^{1,i} \in \mathcal{C}^0 \left(\overline{\Omega^F} \right)$. D'après le résultat précédent, on obtient $w_h^{1,i} \in H^1 \left(\Omega^F \right)$, ce qui implique $W_h^1 \subseteq W^1$. D'une manière analogue, on obtient les inclusions $W_h^2 \subseteq W^2, M_h \subseteq M$ et $Q_h \subseteq H^1 \left(\Omega^F \right)$.

5.1.4 Construction de l'opérateur d'interpolation

On a vu dans les paragraphes précédents que la condition *inf-sup* discrète représente une condition suffisante pour avoir l'existence et l'unicité du problème discret. On a vu aussi que, en utilisant le fait que la condition *inf-sup* continue a lieu et en construisant un opérateur d'interpolation, on peut obtenir la condition *inf-sup* discrète.

Dans ce paragraphe, on construit l'opérateur bilinéaire Π_h qui vérifie les relations (5.1.22) et (5.1.23) où l'application b est donnée par (5.1.9).

Nous chercherons un opérateur Π_h de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Pi_h : W^1 \times W^2 &\rightarrow W_h^1 \times W_h^2 \\ \Pi_h(w^1, w^2) &= (\Pi_h^{11}w^1 + \Pi_h^{12}w^2, \Pi_h^{21}w^1 + \Pi_h^{22}w^2) \end{aligned}$$

où les opérateurs

$$\begin{aligned} \Pi_h^{11} : W^1 &\rightarrow W_h^1, & \Pi_h^{12} : W^2 &\rightarrow W_h^1 \\ \Pi_h^{21} : W^1 &\rightarrow W_h^2, & \Pi_h^{22} : W^2 &\rightarrow W_h^2 \end{aligned}$$

sont linéaires.

En utilisant les notations précédentes, la relation (5.1.23) s'écrit sous la forme

$$(5.1.32) \left\{ \begin{aligned} &\forall (w^1, w^2) \in W^1 \times W^2, \forall (q_h, \mu_h) \in Q_h \times M_h \\ &\quad - (\operatorname{div} (w^1 - \Pi_h^{11}w^1 - \Pi_h^{12}w^2), q_h)_{0, \Omega^F} \\ &\quad - (\gamma_0 (w^1 - \Pi_h^{11}w^1 - \Pi_h^{12}w^2) - \gamma_\Gamma (w^2 - \Pi_h^{21}w^1 - \Pi_h^{22}w^2), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0 \end{aligned} \right.$$

Puisque w^1, w^2, q_h et μ_h sont indépendantes l'une de l'autre, on peut écrire la relation (5.1.32) sous la forme

$$(5.1.33) \left\{ \begin{aligned} &\forall w^1 \in W^1, \forall w^2 \in W^2, \forall q_h \in Q_h, \forall \mu_h \in M_h \\ &\quad (\operatorname{div} (w^1 - \Pi_h^{11}w^1), q_h)_{0, \Omega^F} = 0 \\ &\quad (\operatorname{div} (\Pi_h^{12}w^2), q_h)_{0, \Omega^F} = 0 \\ &\quad (\gamma_0 (w^1 - \Pi_h^{11}w^1) + \gamma_\Gamma (\Pi_h^{21}w^1), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0 \\ &\quad (\gamma_0 (\Pi_h^{12}w^2) + \gamma_\Gamma (w^2 - \Pi_h^{22}w^2), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0 \end{aligned} \right.$$

Nous chercherons un opérateur Π_h , tel que $\Pi_h^{12} = 0$. Le système (5.1.33) devient

$$(5.1.34) \left\{ \begin{aligned} &\forall w^1 \in W^1, \forall w^2 \in W^2, \forall q_h \in Q_h, \forall \mu_h \in M_h \\ &\quad (\operatorname{div} (w^1 - \Pi_h^{11}w^1), q_h)_{0, \Omega^F} = 0 \\ &\quad (\gamma_0 (w^1 - \Pi_h^{11}w^1) + \gamma_\Gamma (\Pi_h^{21}w^1), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0 \\ &\quad (\gamma_\Gamma (w^2 - \Pi_h^{22}w^2), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0 \end{aligned} \right.$$

Proposition 5.1.4 *Il existe un opérateur linéaire*

$$\Pi_h^{11} : W^1 \rightarrow W_h^1$$

tel que

$$(5.1.35) \quad \exists c_{11} > 0, \forall w^1 \in W^1, \|\Pi_h^{11} w^1\|_{W^1} \leq c_{11} \|w^1\|_{W^1}$$

$$(5.1.36) \quad \forall w^1 \in W^1, \forall q_h \in Q_h, \left(\operatorname{div} \left(w^1 - \Pi_h^{11} w^1 \right), q_h \right)_{0, \Omega^F} = 0$$

Démonstration: Ceci se démontre en quatre étapes

- 1) Interpolation de fonction de L^1
- 2) Construction de l'opérateur linéaire Π_h^{11}
- 3) Vérification de (5.1.35)
- 4) Vérification de (5.1.36)

1) Si $\Omega^F \subseteq \mathbb{R}^3$, alors l'espace $H^1(\Omega^F)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F})$. Donc pour w^1 dans $(H^1(\Omega^F))^3$, la valeur $w^1(x)$, où x est un point dans $\overline{\Omega^F}$, ne peut pas être définie.

L'interpolation de fonction de L^1 a été analysée pour la première fois par Clément [1975], qui propose un opérateur d'interpolation en utilisant des régularisations locales. On rappelle ce résultat, cité dans Girault & Raviart [1986, p. 109].

Soit

$$\Theta_h = \left\{ \theta_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F}), \theta_h|_K \in P_1(K) \right\}$$

Alors il existe un opérateur

$$R_h \in \mathcal{L} \left(L^1(\Omega^F); \Theta_h \right)$$

où $L^1(\Omega^F)$ est muni de la norme habituelle et Θ_h est muni d'une norme arbitraire (dans les espaces de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

2) Construction de l'opérateur linéaire Π_h^{11}

On note

$$(P_1 + b)(\Omega^F) = \{w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F}), w|_K \in P_1(K) + b_K\}$$

Puisque la fonction bulle b_K est continue et a la propriété

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^F, \forall x \in \overset{\circ}{K}, b_K(x) > 0,$$

on a

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^F, \int_K b_K(x) dx > 0.$$

Soit l'opérateur π_h^{11} défini par

$$(5.1.37) \quad \begin{cases} \pi_h^{11} : H^1(\Omega^F) \rightarrow (P_1 + b)(\Omega^F) \\ \pi_h^{11} w = R_h w + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \alpha_K(w) b_K \end{cases}$$

où

$$(5.1.38) \quad \begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}_h^F, \alpha_K(w) : H^1(\Omega^F) \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha_K(w) = \frac{\int_K (w - R_h w) dx}{\int_K b_K dx} \end{cases}$$

On pose

$$(5.1.39) \quad \begin{cases} \Pi_h^{11} : (H^1(\Omega^F))^3 \rightarrow W_h^1 \\ \Pi_h^{11} w = (\pi_h^{11} w_1, \pi_h^{11} w_2, \pi_h^{11} w_3) \text{ où } w = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}$$

Puisque R_h est linéaire, on montre facilement que α_K donnée par (5.1.38), π_h^{11} donné par (5.1.37) et Π_h^{11} donné par (5.1.39) sont linéaires.

3) Continuité de Π_h^{11}

D'abord, on démontre la continuité des fonctions α_K .

On a

$$(5.1.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall w \in H^1(\Omega^F), |\alpha_K(w)| \leq \frac{\int_K |w - R_h w| dx}{\int_K b_K dx} \\ \leq \frac{1}{\int_K b_K dx} \left(\int_K |w| dx + \int_K |R_h w| dx \right) \\ \leq \frac{1}{\int_K b_K dx} \left(\int_{\Omega^F} |w| dx + \int_{\Omega^F} |R_h w| dx \right) \end{array} \right.$$

L'opérateur R_h est continu de $L^1(\Omega^F)$ dans Θ_h , donc on a l'inégalité

$$(5.1.41) \quad \exists c > 0, \int_{\Omega^F} |R_h w| dx \leq c \int_{\Omega^F} |w| dx$$

Puisque Ω^F est borné, alors

$$(5.1.42) \quad \exists C(\Omega^F) > 0, \int_{\Omega^F} |w| dx \leq C(\Omega^F) \left(\int_{\Omega^F} w^2 dx \right)^{1/2}$$

On a évidemment

$$\left(\int_{\Omega^F} w^2 dx \right)^{1/2} = \|w\|_{0,\Omega^F} \leq \|w\|_{1,\Omega^F}$$

où $\|\cdot\|_{1,\Omega^F}$ est la norme de $H^1(\Omega^F)$.

En tenant compte de (5.1.40) – (5.1.42), on obtient que pour chaque K de \mathcal{T}_h^F , la fonction α_K définie de $H^1(\Omega^F)$ dans \mathbb{R} est continue.

On sait que $R_h \in \mathcal{L}(L^1(\Omega^F); \Theta_h)$ et d'après l'inégalité (5.1.42), on obtient

$$R_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega^F); \Theta_h)$$

Puisque l'opérateur R_h est continu et toutes les fonctions α_K sont continues, il s'ensuit que π_h^{11} est continu de $H^1(\Omega^F)$ dans $(P_1 + b)(\Omega^F)$, ce qui implique la continuité d'opérateur Π_h^{11} de W^1 dans W_h^1 .

4) Vérification de la relation (5.1.36).

Puisque Ω^F est un ouvert de frontière \mathcal{C}^1 par morceaux, on a la formule de Green

$$\begin{aligned} \forall w = (w^1, w^2, w^3) \in \left(H^1(\Omega^F)\right)^3, \forall q \in H^1(\Omega^F) \\ \int_{\Omega^F} q \operatorname{div} w dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^F} \frac{\partial q}{\partial x_i} w_i dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega^F} q w_i \nu_i d\sigma \end{aligned}$$

où ν_i est le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale ν à $\partial\Omega^F$, dirigée vers l'extérieur de Ω^F . La normale ν est une fonction dans $L^\infty(\partial\Omega^F)$ et les restrictions de q et w_i sur $\partial\Omega^F$ sont dans $L^2(\partial\Omega^F)$, car Ω^F est un ouvert de frontière \mathcal{C}^1 par morceaux. Donc l'intégrale sur $\partial\Omega^F$, qui intervient dans la formule de Green, a un sens.

On a vu dans le paragraphe précédent que $Q_h \subseteq H^1(\Omega^F)$. Sous les notations (5.1.1), (5.1.2), en utilisant la formule de Green et le fait que $q_h = 0$ sur $\partial\Omega^F$, on obtient

$$(5.1.43) \quad \begin{cases} \forall w^1 \in W^1, \forall q_h \in Q_h, \\ (\operatorname{div}(w^1 - \Pi_h^{11} w^1), q_h)_{0, \Omega^F} + (w^1 - \Pi_h^{11} w^1, \operatorname{grad} q_h)_{0, \Omega^F} = 0 \end{cases}$$

Mais, on a l'égalité

$$(5.1.44) \quad (w^1 - \Pi_h^{11} w^1, \operatorname{grad} q_h)_{0, \Omega^F} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} (w^1 - \Pi_h^{11} w^1, \operatorname{grad} q_h)_{0, K}$$

Puisque $q_h|_K \in P_1(K)$, on a

$$(\operatorname{grad} q_h)|_K = (c_K^1, c_K^2, c_K^3) \in \mathbb{R}^3$$

et en conséquence on obtient

$$(5.1.45) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} (w^1 - \Pi_h^{11} w^1, \operatorname{grad} q_h)_{0, K} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \sum_{i=1}^3 c_K^i \int_K (w^{1,i} - \pi_h^{11} w^{1,i}) dx$$

où $w^1 = (w^{1,1}, w^{1,2}, w^{1,3})$.

D'après la définition de π_h^{11} , on a

$$\int_K (w^{1,i} - \pi_h^{11} w^{1,i}) dx = \int_K \left(w^{1,i} - R_h w^{1,i} - \sum_{K' \in \mathcal{T}_h^F} \alpha_{K'} (w^{1,i}) b_{K'} \right) dx$$

En tenant compte des propriétés de la fonction bulle, on a

$$\int_K b_{K'} dx = 0, \forall K, K' \in \mathcal{T}_h^F, K \neq K'$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_K (w^{1,i} - \pi_h^{11} w^{1,i}) dx &= \int_K (w^{1,i} - R_h w^{1,i} - \alpha_K (w^{1,i}) b_K) dx \\ &= \int_K (w^{1,i} - R_h w^{1,i}) dx - \alpha_K (w^{1,i}) \int_K b_K dx \end{aligned}$$

Mais α_K est donnée par l'égalité (5.1.38), d'où

$$(5.1.46) \quad \int_K (w^{1,i} - \pi_h^{11} w^{1,i}) dx = 0, i = 1, 2, 3$$

Enfin, d'après les relations (5.1.43) – (5.1.46) on obtient (5.1.36). \square

Avant de passer à la construction des opérateurs Π_h^{21} et Π_h^{22} , on donne quelques notations.

Soient

$I_F = \{A_i\}_{i=1}^{NSF}$ l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^F

$I_S = \{B_i\}_{i=1}^{NSS}$ l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^S

$I_\Gamma = \{C_i\}_{i=1}^{NSG}$ l'ensemble des sommets confondus géométriquement de \mathcal{T}_h^F et \mathcal{T}_h^S

I_{Σ^1} l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^S , qui appartiennent à $\overline{\Sigma^1}$

De point de vue informatique, cette manière de numéroter indépendamment les sommets de \mathcal{T}_h^F , respectivement de \mathcal{T}_h^S , permet de traiter séparément les problèmes du fluide et de la structure.

Pour le problème du fluide, notons

$$(5.1.47) \quad \Theta_h = \left\{ \theta_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^F}); \theta_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^F \right\}$$

Il est bien connu que pour chaque sommet $A_i \in I_F$, il existe une fonction unique $\phi_i \in \Theta_h$, telle que

$$\phi_i(A_j) = \delta_{ij}, \forall A_j \in I_F$$

En plus, $\{\phi_i\}_{i=1}^{NSF}$ constitue une base de l'espace Θ_h . Une démonstration de ce résultat se trouve dans Raviart & Thomas [1992, p. 107].

Soit

$$(5.1.48) \quad (P_1 + b) (\Omega^F) = \left\{ w \in \mathcal{C}^0 (\overline{\Omega^F}) ; w|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^F \right\}$$

D'après les propriétés de la fonction bulle b_K , l'ensemble $\{\phi_i\}_{i=1}^{NSF} \cup \{b_K\}_{K \in \mathcal{T}_h^F}$ constitue une base pour $(P_1 + b) (\Omega^F)$.

Pour le problème de la structure, notons

$$(5.1.49) \quad \Psi_h = \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}^0 (\overline{\Omega^F}) ; \psi|_{\Sigma^1} = 0, \psi|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^S \right\}$$

Pour chaque sommet $B_i \in I_S \setminus I_{\Sigma^1}$, il existe une fonction unique $\psi_i \in \Psi_h$, telle que

$$\psi_i(B_j) = \delta_{ij}, \quad \forall B_j \in I_S$$

En plus, $\{\psi_i\}_{i=1}^{NSS}$ constitue une base pour Ψ_h .

Soit

$$(5.1.50) \quad \Upsilon_h = \left\{ \eta \in \mathcal{C}^0 (\overline{\Gamma}) ; \eta|_T \in P_1(T), \forall T \in \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^F} (K \cap \overline{\Gamma}) \right\}$$

Pour chaque sommet $C_i \in I_\Gamma$, il existe une fonction unique $\eta_i \in \Upsilon_h$, telle que

$$\eta_i(C_j) = \delta_{ij}, \quad \forall C_j \in I_\Gamma$$

En plus, $\{\eta_i\}_{i=1}^{NSG}$ constitue une base pour Υ_h .

En tenant compte de la condition de compatibilité entre les triangulations \mathcal{T}_h^F et \mathcal{T}_h^S sur la surface de contact Γ , on a

$$(5.1.51) \quad \begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, NSG\}, \\ & \exists! r(i) \in \{1, \dots, NSF\}, \exists! s(i) \in \{1, \dots, NSS\}, \text{ tels que} \\ & C_i = A_{r(i)} = B_{s(i)} \end{aligned}$$

En plus, on a

$$(5.1.52) \quad \eta_i = \phi_{r(i)}|_{\Gamma} = \psi_{s(i)}|_{\Gamma}$$

On peut maintenant passer à la construction de l'opérateur Π_h^{21} .

Proposition 5.1.5 *Il existe un opérateur linéaire*

$$\Pi_h^{21} : W^1 \rightarrow W_h^2$$

tel que

$$(5.1.53) \quad \exists c_{21} > 0, \forall w^1 \in W^1, \|\Pi_h^{21} w^1\|_{W^1} \leq c_{21} \|w^1\|_{W^1}$$

$$(5.1.54) \quad \forall w^1 \in W^1, \forall \mu_h \in M_h, \\ (\gamma_\Gamma (\Pi_h^{21} w^1) + \gamma_0 (w^1 - \Pi_h^{11} w^1), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0$$

Démonstration: La démonstration est décomposée en trois étapes:

- 1) Construction de l'opérateur Π_h^{21}
- 2) Linéarité et la continuité de Π_h^{21}
- 3) Vérification de (5.1.54)

1) Soit

$$(5.1.55) \quad M_h \in \mathcal{M}_{NSG}(\mathbb{R}) \\ M_h = (\eta_i, \eta_j)_{1/2, \Gamma} \quad 1 \leq i, j \leq NSG$$

qui est une matrice symétrique et définie positive.

Soient

$$F : H^1(\Omega^F) \rightarrow \mathbb{R}^{NSG} \\ F(w) = (F_1(w), \dots, F_{NSG}(w))^t \\ F_i(w) = (\gamma_0(-w + \Pi_h^{11} w), \eta_i)_{1/2, \Gamma}$$

et

$$\alpha : H^1(\Omega^F) \rightarrow \mathbb{R}^{NSG} \\ \alpha(w) = (\alpha_1(w), \dots, \alpha_{NSG}(w))^t \\ \alpha_i(w) = M_h^{-1} F(w)$$

On pose

$$\pi_h^{21} : H^1(\Omega^F) \rightarrow \Psi_h \\ \pi_h^{21} w = \sum_{i=1}^{NSG} \alpha_i(w) \psi_{s(i)}$$

où $s : \{1, \dots, NSG\} \rightarrow \{1, \dots, NSS\}$ est l'application injective donnée par la relation

(5.1.51). Maintenant, on peut définir l'opérateur Π_h^{21} par

$$\Pi_h^{21} : W^1 \rightarrow W_h^2 \\ \Pi_h^{21} w^1 = (\pi_h^{21} w^{1,1}, \pi_h^{21} w^{1,2}, \pi_h^{21} w^{1,3}) \\ \text{où } w^1 = (w^{1,1}, w^{1,2}, w^{1,3}) \in W^1$$

2) La linéarité et la continuité de Π_h^{21}

Puisque l'opérateur Π_h^{11} et l'application trace sont linéaires et continus, $F(\cdot)$ est linéaire et continue. En tenant compte des relations existant entre F , α , π_h^{21} et Π_h^{21} , on montre que l'opérateur Π_h^{21} est linéaire et continu.

3) Vérification de (5.1.54)

Pour $w \in H^1(\Omega^F)$, on a

$$\pi_h^{21} w = \sum_{i=1}^{NSG} \alpha_i(w) \psi_{s(i)}$$

d'où

$$\gamma_\Gamma(\pi_h^{21} w) = \sum_{i=1}^{NSG} \alpha_i(w) \psi_{s(i)}|_\Gamma$$

D'après (5.1.51), on obtient

$$\gamma_\Gamma(\pi_h^{21} w) = \sum_{i=1}^{NSG} \alpha_i(w) \eta_i$$

d'où

$$\left(\gamma_\Gamma(\pi_h^{21} w), \eta_j \right)_{1/2, \Gamma} = \left(\sum_{i=1}^{NSG} \alpha_i(w) \eta_i, \eta_j \right)_{1/2, \Gamma} \quad \forall j = 1, \dots, NSG$$

Si on écrit cette égalité sous la forme matricielle et puisque M_h est symétrique, on a

$$\begin{pmatrix} (\gamma_\Gamma(\pi_h^{21} w), \eta_1)_{1/2, \Gamma} \\ \vdots \\ (\gamma_\Gamma(\pi_h^{21} w), \eta_{NSG})_{1/2, \Gamma} \end{pmatrix} = M_h^t \alpha(w) = M_h M_h^{-1} F(w) = F(w)$$

d'où l'égalité (5.1.54). \square

Proposition 5.1.6 *Il existe un opérateur linéaire*

$$\Pi_h^{22} : W^2 \rightarrow W_h^2$$

tel que

$$(5.1.56) \quad \exists c_{22} > 0, \forall w^2 \in W^2, \left\| \Pi_h^{22} w^2 \right\|_{W^1} \leq c_{22} \left\| w^2 \right\|_{W^1}$$

$$(5.1.57) \quad \forall w^2 \in W^2, \forall \mu_h \in M_h, \\ (\gamma_\Gamma(w^2 - \Pi_h^{22} w^2), \mu_h)_{1/2, \Gamma} = 0$$

Démonstration: La démonstration est décomposée en trois étapes

- 1) Construction de l'opérateur Π_h^{22}
- 2) La linéarité et la continuité de Π_h^{22}
- 3) Vérification de (5.1.57)

1) Soient

$$\begin{aligned} G : \{w \in H^1(\Omega^F); w|_{\Sigma^1} = 0\} &\rightarrow \mathbb{R}^{NSG} \\ G(w) &= (G_1(w), \dots, G_{NSG}(w))^t \\ G_i(w) &= (\gamma_\Gamma(w), \eta_i)_{1/2, \Gamma} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta : \{w \in H^1(\Omega^F); w|_{\Sigma^1} = 0\} &\rightarrow \mathbb{R}^{NSG} \\ \beta(w) &= (\beta_1(w), \dots, \beta_{NSG}(w))^t \\ \beta_i(w) &= M_h^{-1} G(w) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \pi_h^{22} : \{w \in H^1(\Omega^F); w|_{\Sigma^1} = 0\} &\rightarrow \Psi_h \\ \pi_h^{22} w &= \sum_{i=1}^{NSG} \beta_i(w) \psi_{s(i)} \end{aligned}$$

où $s : \{1, \dots, NSG\} \rightarrow \{1, \dots, NSS\}$ est l'application injective donnée par la relation (5.1.51). Maintenant, on peut définir l'opérateur Π_h^{22} par

$$\begin{aligned} \Pi_h^{22} : W^2 &\rightarrow W_h^2 \\ \Pi_h^{22} w^2 &= (\pi_h^{22} w^{2,1}, \pi_h^{22} w^{2,2}, \pi_h^{22} w^{2,3}) \\ \text{où } w^2 &= (w^{2,1}, w^{2,2}, w^{2,3}) \in W^2 \end{aligned}$$

2) La linéarité et la continuité de Π_h^{22}

Puisque l'application trace est linéaire et continue, on obtient que $G(\cdot)$ est linéaire et continue. En tenant compte des relations existant entre G , β , π_h^{22} et Π_h^{22} , on montre que l'opérateur Π_h^{22} est linéaire et continu.

3) Vérification de (5.1.57)

Pour $w \in \{w \in H^1(\Omega^F); w|_{\Sigma^1} = 0\}$, on a

$$\pi_h^{22} w = \sum_{i=1}^{NSG} \beta_i(w) \psi_{s(i)}$$

d'où

$$\gamma_{\Gamma} \left(\pi_h^{22} w \right) = \sum_{i=1}^{NSG} \beta_i(w) \psi_{s(i)} |_{\Gamma}$$

D'après (5.1.51), on obtient

$$\gamma_{\Gamma} \left(\pi_h^{21} w \right) = \sum_{i=1}^{NSG} \beta_i(w) \eta_i$$

d'où

$$\left(\gamma_{\Gamma} \left(\pi_h^{22} w \right), \eta_j \right)_{1/2, \Gamma} = \left(\sum_{i=1}^{NSG} \beta_i(w) \eta_i, \eta_j \right)_{1/2, \Gamma} \quad \forall j = 1, \dots, NSG$$

Si on écrit cette égalité sous la forme matricielle et puisque M_h est symétrique, on a

$$\begin{pmatrix} \left(\gamma_{\Gamma} \left(\pi_h^{22} w \right), \eta_1 \right)_{1/2, \Gamma} \\ \vdots \\ \left(\gamma_{\Gamma} \left(\pi_h^{22} w \right), \eta_{NSG} \right)_{1/2, \Gamma} \end{pmatrix} = M_h^t \beta(w) = M_h M_h^{-1} G(w) = \begin{pmatrix} \left(\gamma_{\Gamma}(w), \eta_1 \right)_{1/2, \Gamma} \\ \vdots \\ \left(\gamma_{\Gamma}(w), \eta_{NSG} \right)_{1/2, \Gamma} \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité (5.1.57). \square

5.1.5 Bilan de la section

Dans cette section, à partir des éléments finis de type mixte, on a construit des espaces vectoriels de dimension finie, tels que le problème totalement discrétisé soit bien posé.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème discret, on utilise la théorie de Babuska et Brezzi. Grâce à cette théorie, on obtient l'existence et l'unicité si une condition d'ellipticité et une condition *inf-sup* discrète ont lieu.

Dans notre problème, la condition d'ellipticité est assurée par la proposition 5.1.1.

Dans le chapitre précédent, on a vu que la condition *inf-sup* continue a lieu. En utilisant ce résultat, on peut démontrer que la condition *inf-sup* discrète a lieu, si on dispose d'un opérateur d'interpolation (proposition 5.1.2).

L'existence d'un opérateur d'interpolation est assurée par les propositions 5.1.4, 5.1.5 et 5.1.6.

5.2 Un algorithme de type Uzawa pour la résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique

Les deux contraintes du problème sont: la divergence nulle pour le fluide et l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact.

On introduit un nouvel algorithme de type Uzawa, dans lequel chacune des contraintes sera traitée différemment, ce qui va permettre le découplage du problème fluide structure.

L'avantage réside dans le fait que, après le découplage, on peut utiliser les codes numérique déjà existants pour résoudre séparément les problèmes du fluide et de la structure. Par exemple, on peut résoudre le problème du fluide par l'algorithme d'Uzawa/gradient conjugué, tandis que le problème de la structure est résolu par le schéma de Newmark/factorisation de Cholesky.

La convergence de l'algorithme sera démontrée.

5.2.1 Présentation du problème

Après la discrétisation en temps et en espace du problème d'interaction fluide structure, il nous faut résoudre à chaque pas de temps un système linéaire de type suivant:

Trouver $(v, \nu, p, \lambda) \in \mathbb{R}^{NW1} \times \mathbb{R}^{NW2} \times \mathbb{R}^{NQ} \times \mathbb{R}^{NM}$, où $NW1, NW2, NQ$ et NM sont des nombres naturels non nuls, tels que

$$(5.2.1) \quad \begin{pmatrix} A_F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & & \\ B_{21} & B_{22} & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \nu \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec les hypothèses suivantes

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} & A_F \in M_{NW1}(\mathbb{R}) \text{ symétrique, tel que} \\ & \exists \alpha_F > 0, \forall w1 \in \mathbb{R}^{NW1}, (A_F w1, w1) \geq \alpha_F \|w1\|^2 \end{aligned}$$

$$(5.2.3) \quad A_S \in M_{NW_2}(\mathbb{R}) \text{ symétrique, tel que } \exists \alpha_S > 0, \forall w_2 \in \mathbb{R}^{NW_2}, (A_S w_2, w_2) \geq \alpha_S \|w_2\|^2$$

$$(5.2.4) \quad B_{11} \in M_{NQ, NW_1}(\mathbb{R})$$

$$(5.2.5) \quad B_{21} \in M_{NM, NW_1}(\mathbb{R})$$

$$(5.2.6) \quad B_{22} \in M_{NM, NW_2}(\mathbb{R})$$

$$(5.2.7) \quad f_F \in \mathbb{R}^{NW_1}, f_S \in \mathbb{R}^{NW_2}$$

Les matrices B_{11} , B_{21} et B_{22} n'ont pas la même origine: la matrice B_{11} provient de la contrainte de divergence nulle pour le fluide, tandis que B_{21} et B_{22} proviennent de la condition de couplage selon laquelle les vitesses du fluide et de la structure sont égales sur la surface de contact.

Rappelons l'hypothèse sous laquelle le système (5.2.1) a une solution unique.

Lemme 5.2.1 *Sous les hypothèses (5.2.2) et (5.2.3), la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} A_F & 0 \\ 0 & A_S \end{pmatrix}$$

est symétrique et elliptique de constante $\alpha = \min \{\alpha_F, \alpha_S\}$.

Démonstration: La matrice A est évidemment symétrique.

Si $w = (w_1, w_2)$, alors:

$$\begin{aligned} (Aw, w) &= (A_F w_1, w_1) + (A_S w_2, w_2) \\ &\geq \alpha_F \|w_1\|^2 + \alpha_S \|w_2\|^2 \geq \alpha \|w\|^2 \end{aligned}$$

où $\alpha = \min \{\alpha_F, \alpha_S\}$. \square

On note

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

et par la suite, on va travailler sous l'hypothèse suivante

$$(5.2.8) \quad \text{rang}(B) = NQ + NM$$

Remarque 5.2.1 L'égalité (5.2.8) est vérifiée si l'élément fini utilisé pour la discrétisation en espace satisfait la condition *inf-sup*, dans le sens de la théorie de Babuska et Brezzi.

On rappelle maintenant un résultat classique de la théorie d'optimisation.

Théorème 5.2.1 *Sous les hypothèses (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.8), le système (5.2.1) admet une solution unique.*

Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans Ciarlet [1988].

5.2.2 L'algorithme d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa est une méthode itérative pour la résolution du système (5.2.1).

Notons

$$V = \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \end{pmatrix}$$

Le système (5.2.1) s'écrit alors sous la forme équivalente

$$(5.2.9) \quad \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme d'Uzawa

Pas 1 Initialisation

Soient $\rho > 0, k = 0, \Lambda_0 \in \mathbb{R}^{NQ+NM}$

Pas 2 Calcul de V_k

$$(5.2.10) \quad AV_k = F - B^t \Lambda_k$$

Pas 3 Test d'arrêt

$$(5.2.11) \quad \text{Si } BV_k = 0 \text{ alors STOP}$$

Pas 4 Calcul de Λ_k

$$(5.2.12) \quad \begin{aligned} \Lambda_{k+1} &= \Lambda_k + \rho B V_k \\ k &\leftarrow k + 1 \text{ retour au pas 2} \end{aligned}$$

On rappelle le résultat de convergence classique

Théorème 5.2.2 *Sous les hypothèses (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.8), pour tout*

$$\Lambda_0 \in \mathbb{R}^{NQ+NM}, \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|B\|^2}$$

l'algorithme d'Uzawa peut s'arrêter après un nombre fini d'itérations, ou construire une suite $\{(V_k, \Lambda_k)\}_{k \geq 0}$ qui converge vers la solution unique du système (5.2.9).

Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans Ciarlet [1988].

5.2.3 Résolution découplée d'un problème d'interaction fluide incompressible structure élastique: présentation de l'algorithme, théorème de convergence

Dans l'algorithme d'Uzawa, les matrices B_{11} , B_{21} , B_{22} sont traitées en bloc. Ces matrices sont de natures différentes: B_{11} provient de la contrainte de divergence nulle pour le fluide, tandis que B_{21} et B_{22} proviennent de la condition de couplage d'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact.

Le temps de calcul pour approcher la solution du système (5.2.1) par l'algorithme d'Uzawa dépend du paramètre ρ . Le choix de ce paramètre est influencé par l'ensemble de toutes les contraintes.

On va introduire un nouvel algorithme dans lequel chacune de contraintes sera traitée différemment, ce qui va permettre le découplage du problème fluide structure.

Algorithme pour la résolution découplée

Pas 1 Initialisation

Soient $\rho_1 > 0, k = 0, \lambda_0 \in \mathbb{R}^{NM}$

Pas 2 Résolution du problème du fluide

trouver $(v_k, p_k) \in \mathbb{R}^{NW_1} \times \mathbb{R}^{NQ}$, tel que

$$(5.2.13) \quad \begin{pmatrix} A_F & B_{11}^t \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F - B_{21}^t \lambda_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pas 3 Résolution du problème de la structure

trouver $\nu_k \in \mathbb{R}^{NW_2}$, tel que

$$(5.2.14) \quad A_S \nu_k = f_S - B_{22}^t \lambda_k$$

Pas 4 Test d'arrêt

$$(5.2.15) \quad \text{Si } B_{21} v_k + B_{22} \nu_k = 0 \text{ alors STOP}$$

Pas 5 Réinitialisation

$$(5.2.16) \quad \begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \rho_1 (B_{21} v_k + B_{22} \nu_k) \\ k &\leftarrow k + 1 \text{ retour au pas 2} \end{aligned}$$

Remarque 5.2.2 Le paramètre ρ_1 ne dépend que des matrices B_{21} et B_{22} .

Remarque 5.2.3 Le problème du pas 1 peut être résolu par l'algorithme d'Uzawa avec un paramètre ρ_2 , qui sera associé à la matrice de contrainte B_{11} . En fait, le paramètre ρ qui intervient dans l'algorithme (5.2.10)-(5.2.12) est remplacé par deux paramètres ρ_1 et ρ_2 . Le paramètre ρ_1 , qui intervient dans (5.2.16), est associé à la contrainte d'avoir les vitesses du fluide et de la structure égales sur l'interface de

contact et le paramètre ρ_2 , qui va intervenir dans la résolution du problème (5.2.13) par l'algorithme d'Uzawa, est associé à la contrainte de divergence nulle pour le fluide.

Ainsi, on traite différemment les deux contraintes du problème et en conséquence on peut approcher l'une de ces contraintes avec plus de précision que l'autre, ce qui peut réduire le temps de calcul.

Remarque 5.2.4 D'après le théorème 5.2.1, si l'on a l'égalité $\text{rang}(B_{11}) = NQ$ et sous l'hypothèse (5.2.2), alors le problème (5.2.13) a une solution unique.

Lemme 5.2.2 Si l'égalité (5.2.8) est vérifiée, alors nous avons $\text{rang}(B_{11}) = NQ$ et $\text{rang}(B_{22}) = NM$.

Démonstration: On va utiliser un raisonnement par l'absurde.

Soient

$$B_{11} \in \mathcal{M}_{NQ, NW_1}(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NQ, NW_1 + NW_2}(\mathbb{R})$$

Bien évidemment

$$\text{rang}(B_{11}) = \text{rang} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose $\text{rang}(B_{11}) < NQ$.

Puisque

$$\begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NM, NW_1 + NW_2}(\mathbb{R})$$

alors nécessairement $\text{rang} \begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \leq NM$ et en conséquence

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} < NQ + NM$$

d'où une contradiction. De manière analogue, on démontre que $\text{rang}(B_{22}) = NM$. \square

Remarque 5.2.5 Sous l'hypothèse (5.2.8), le système (5.2.13) a une solution unique.

Théorème 5.2.3 *Sous les hypothèses (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.8), pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{NM}$ et $0 < \rho 1 < \min \left\{ \frac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \frac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2} \right\}$, l'algorithme (5.2.13)-(5.2.16) soit s'arrête après un nombre fini de pas, soit construit une suite $\{(v_k, \nu_k, p_k, \lambda_k)\}_{k \geq 0}$ convergeant vers la solution unique de (5.2.1).*

Démonstration: On va faire la preuve en trois étapes:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k) = v$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} (\nu_k) = \nu$
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k) = \lambda$
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} (p_k) = p$

1) Si $B_{21}v_k + B_{22}\nu_k = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} A_F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & & \\ B_{21} & B_{22} & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ \nu_k \\ p_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque le système (5.2.1) admet une solution unique sous les hypothèses (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.8), alors la solution est trouvée après un nombre fini de pas.

On suppose maintenant que l'algorithme ne s'arrête à l'étape 4.

D'après (5.2.1) on a $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$ et en utilisant (5.2.13), on obtient

$$\lambda_{k+1} - \lambda = \lambda_k - \lambda + \rho 1 [B_{21} (v_k - v) + B_{22} (\nu_k - \nu)]$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2(a, b)$$

et on obtient

$$(5.2.17) \quad \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda_k - \lambda\|^2 + (\rho 1)^2 \|B_{21} (v_k - v) + B_{22} (\nu_k - \nu)\|^2 + 2\rho 1 (\lambda_k - \lambda, B_{21} (v_k - v) + B_{22} (\nu_k - \nu))$$

On a l'égalité suivante:

$$(5.2.18) \quad \begin{aligned} & (\lambda_k - \lambda, B_{21}(v_k - v)) + (\lambda_k - \lambda, B_{22}(\nu_k - \nu)) \\ & = (B_{21}^t(\lambda_k - \lambda), v_k - v) + (B_{22}^t(\lambda_k - \lambda), \nu_k - \nu) \end{aligned}$$

D'après (5.2.1) on a

$$A_F v + B_{11}^t p + B_{21}^t \lambda = f_F$$

et d'après (5.2.13) on a

$$A_F v_k + B_{11}^t p_k + B_{21}^t \lambda_k = f_F$$

ce qui implique

$$(5.2.19) \quad A_F(v_k - v) + B_{11}^t(p_k - p) + B_{21}^t(\lambda_k - \lambda) = 0$$

En utilisant (5.2.19) on obtient

$$\begin{aligned} & (B_{21}^t(\lambda_k - \lambda), v_k - v) \\ & = -(A_F(v_k - v), v_k - v) - (B_{11}^t(p_k - p), v_k - v) \\ & = -(A_F(v_k - v), v_k - v) - (p_k - p, B_{11}(v_k - v)) \end{aligned}$$

Mais d'après (5.2.1) on a $B_{11}v = 0$ et d'après (5.2.13) on a $B_{11}v_k = 0$. Donc on a

$$(5.2.20) \quad (B_{21}^t(\lambda_k - \lambda), v_k - v) = -(A_F(v_k - v), v_k - v)$$

D'après (5.2.1) on a

$$A_S \nu + B_{22}^t \lambda = f_S$$

et d'après (5.2.14) on a

$$A_S \nu_k + B_{22}^t \lambda_k = f_S$$

ce qui donne

$$(5.2.21) \quad A_S(\nu_k - \nu) + B_{22}^t(\lambda_k - \lambda) = 0$$

En utilisant l'égalité précédente on obtient

$$(5.2.22) \quad (B_{22}^t(\lambda_k - \lambda), \nu_k - \nu) = -(A_S(\nu_k - \nu), \nu_k - \nu)$$

D'après (5.2.17),(5.2.18),(5.2.20) et (5.2.22) on obtient

$$\begin{aligned} & 2\rho_1 (A_F (v_k - v), v_k - v) + 2\rho_1 (A_S (\nu_k - \nu), \nu_k - \nu) \\ & - (\rho_1)^2 \|B_{21} (v_k - v) + B_{22} (\nu_k - \nu)\|^2 \\ & = \|\lambda_k - \lambda\|^2 - \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 \end{aligned}$$

On a l'inégalité

$$\begin{aligned} & \|B_{21} (v_k - v) + B_{22} (\nu_k - \nu)\|^2 \\ & \leq (\|B_{21}\| \|v_k - v\| + \|B_{22}\| \|\nu_k - \nu\|)^2 \\ & \leq 2 (\|B_{21}\|^2 \|v_k - v\|^2 + \|B_{22}\|^2 \|\nu_k - \nu\|^2) \end{aligned}$$

Puisque $\rho_1 > 0$ et en utilisant les hypothèses (5.2.2) et (5.2.3) on obtient

$$(5.2.23) \quad \begin{aligned} & 2\rho_1 (\alpha_F - \rho_1 \|B_{21}\|^2) \|v_k - v\|^2 + 2\rho_1 (\alpha_S - \rho_1 \|B_{22}\|^2) \|\nu_k - \nu\|^2 \\ & \leq \|\lambda_k - \lambda\|^2 - \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 \end{aligned}$$

Si $0 < \rho_1 < \min \left\{ \frac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \frac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2} \right\}$, alors d'après l'inégalité précédente on obtient

$$0 \leq \|\lambda_k - \lambda\|^2 - \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2$$

donc la suite $\{\|\lambda_k - \lambda\|^2\}_{k \geq 0}$ est décroissante. Puisque $0 \leq \|\lambda_k - \lambda\|^2$ alors la suite est convergente, donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|\lambda_k - \lambda\|^2 - \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2) = 0$$

En utilisant la relation (5.2.23) on obtient la conclusion de la première étape.

2) Intéressons nous maintenant à la convergence de $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$.

D'après la première étape, la suite $\{\|\lambda_k - \lambda\|^2\}_{k \geq 0}$ converge, donc $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ est bornée et en conséquence, il existe au moins une sous-suite $\{\lambda_{k_s}\}_{s \geq 0}$ convergente vers une limite $\bar{\lambda}$.

En passant à la limite dans l'égalité (5.2.21) et en tenant compte de la première étape, on obtient

$$B_{22}^t (\bar{\lambda} - \lambda) = 0$$

Mais sous l'hypothèse (5.2.8) et d'après le lemme 5.2.2, $\text{rang}(B_{22}) = NM$ donc les colonnes de B_{22}^t sont linéairement indépendantes, ce qui implique $\bar{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ a un unique point d'accumulation.

Pour finir la deuxième étape, on utilise le résultat suivant: dans un espace de dimension finie, une suite bornée avec un unique point d'accumulation est convergente.

3) Intéressons nous maintenant à la convergence de la suite $\{p_k\}_{k \geq 0}$.

D'après (5.2.13) on a

$$B_{11}^t p_k = f_F - A_F v_k - B_{21}^t \lambda_k$$

D'après les deux premières étapes, on obtient que $B_{11}^t p_k$ est bornée.

Puisque $\text{rang}(B_{11}) = NQ$, alors $\{p_k\}_{k \geq 0}$ est bornée. Soit \bar{p} un point d'accumulation de cette suite. En passant à la limite dans l'égalité (5.2.19), on obtient

$$B_{11}^t (\bar{p} - p) = 0$$

Puisque $\text{rang}(B_{11}) = NQ$, alors $\bar{p} = p$. Selon le même type de raisonnement que celui utilisé dans la deuxième étape, on obtient la convergence de $\{p_k\}_{k \geq 0}$ vers p . \square

5.3 Stabilité en temps du schéma complètement discrétisé

Dans cette section on étudie la stabilité en temps du schéma complètement discrétisé présenté au début de ce chapitre.

On a vu dans le chapitre précédent que, sous trois hypothèses, le schéma semi-discrétisé est stable en temps. Pour le schéma complètement discrétisé, deux parmi ces hypothèses sont vérifiées.

La stabilité en temps du schéma complètement discrétisé est une simple conséquence de la stabilité en temps du schéma semi-discrétisé.

On utilise les notations (5.1.1)-(5.1.15) du début de ce chapitre.

Si on fait $n = 0$ dans (5.1.15), on obtient:

$$(5.3.1) \quad \begin{pmatrix} \Delta t A_{h,\Delta t}^F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & \Delta t A_{h,\Delta t}^S & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \\ \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \\ p_h^1 \\ \lambda_h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_h^1 \\ G_{h,\Delta t}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} A_{h,\Delta t}^F &= \frac{1}{\Delta t} M_h^F + \nu_{cin} K_h^F \\ A_{h,\Delta t}^S &= \frac{1}{\Delta t} M_h^F + \frac{\Delta t}{2\rho} K_h^S \\ G_h^1 &= (f_1^1, \bar{\phi}_i)_{0,\Omega^F} - \nu_{cin} a_F(v_h^1, \bar{\phi}_i), i = 1, \dots, NW1 \\ G_{h,\Delta t}^2 &= (f_2^1, \bar{\psi}_i)_{0,\Omega^F} - \frac{1}{\rho} a_S\left(u_h^0 + \frac{\Delta t}{2} \nu_h^0, \bar{\psi}_i\right), i = 1, \dots, NW2 \end{aligned}$$

Lemme 5.3.1 *Il existe une constante positive C_h , qui ne dépend pas de Δt , telle que:*

$$(5.3.2) \quad \left\| \frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \right\|_2^2 + \|p_h^1\|_2^2 + \|\lambda_h^1\|_2^2 \leq C_h, \forall \Delta t \in]0, T]$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne.

Démonstration: Pour chaque $\lambda \in [0, T]$, on pose:

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} A_\lambda & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_\lambda = \begin{pmatrix} M_h^F + (\lambda) \nu_{cin} K_h^F & 0 \\ 0 & M_h^F + \frac{(\lambda)^2}{2\rho} K_h^S \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

D'après les propriétés des matrices M_h^F , K_h^F , M_h^F et K_h^S , on obtient que A_λ est symétrique et définie positive pour chaque λ dans $[0, T]$. Remarquons que λ peut être nul.

Dans les sections précédentes, on a vu que la condition *inf-sup* discrète a lieu. Grâce à la théorie de Babuska-Brezzi, D_λ est inversible pour chaque λ dans $[0, T]$.

Soit l'application $\lambda \rightarrow \|D_\lambda^{-1}\|_2$ de $[0, T]$ dans \mathbb{R} , qui est la composition des trois applications suivantes:

$$\lambda \xrightarrow{1} D_\lambda \xrightarrow{2} D_\lambda^{-1} \xrightarrow{3} \|D_\lambda^{-1}\|_2$$

Les applications 1 et 3 sont évidemment continues. Pour démontrer que l'application 2 est aussi continue, on va utiliser le résultat qui se trouve dans Dautray & Lions [1988, chap VI, p. 1149]:

Pour chaque $\lambda, \lambda_0 \in [0, T]$, tels que $\|D_\lambda - D_{\lambda_0}\|_2 < \frac{1}{\|D_{\lambda_0}^{-1}\|_2}$, on a:

$$(5.3.3) \quad \|D_\lambda^{-1} - D_{\lambda_0}^{-1}\|_2 \leq \frac{\|D_{\lambda_0}^{-1}\|_2^2 \|D_\lambda - D_{\lambda_0}\|_2}{1 - \|D_{\lambda_0}^{-1}\|_2 \|D_\lambda - D_{\lambda_0}\|_2}$$

Donc si $D_\lambda \rightarrow D_{\lambda_0}$, alors $D_\lambda^{-1} \rightarrow D_{\lambda_0}^{-1}$. Puisque les applications 1, 2, 3 sont continues, alors l'application $\lambda \rightarrow \|D_\lambda^{-1}\|_2$ de $[0, T]$ dans \mathbb{R} est continue, donc bornée et par conséquent il existe une constante positive c_h^1 , qui ne dépend pas de Δt , telle que:

$$(5.3.4) \quad \|D_{\Delta t}^{-1}\|_2 \leq c_h^1, \forall \Delta t \in]0, T]$$

Puisque f^1, f^2, a_F, a_S sont continues, il existe une constante positive c_h^2 qui ne dépend pas de Δt , telle que:

$$(5.3.5) \quad \left\| G_h^1 \right\|_2^2 + \left\| G_{h,\Delta t}^2 \right\|_2^2 \leq c_h^2, \forall \Delta t \in]0, T]$$

D'après (5.3.1), (5.3.4) et (5.3.5), on déduit (5.3.2). \square

Proposition 5.3.1 *Il existe deux constantes positives C_h^1, C_h^2 , qui ne dépendent pas de Δt , telles que:*

$$(5.3.6) \quad \left\| \frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega^F}^2 + \left\| \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega^S}^2 \leq C_h^1, \forall \Delta t \in]0, T]$$

$$(5.3.7) \quad \left\| \nu_h^1 \right\|_{1,\Omega^S} \leq C_h^2, \forall \Delta t \in]0, T]$$

Démonstration: Remarquons d'abord que ν_h^1 dépend de Δt , donc (5.3.7) a un sens.

On a les inégalités

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega^F}^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{NW1} \left(\frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right)_i \bar{\phi}_i \right\|_{0,\Omega^F}^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{NW1} \left(\frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right)_i \bar{\phi}_i, \sum_{i=1}^{NW1} \left(\frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right)_i \bar{\phi}_i \right)_{0,\Omega^F} \\ &= \left(\frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right)^t M_h^F \left(\frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right) \leq \left\| M_h^F \right\|_2 \left\| \frac{v_h^1 - v_h^0}{\Delta t} \right\|_2^2 \end{aligned}$$

D'une façon analogue, on obtient:

$$\left\| \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega^S}^2 \leq \left\| M_h^S \right\|_2 \left\| \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \right\|_2^2$$

En utilisant le Lemme 5.3.1, on déduit (5.3.6).

Puisque a_S est W^2 elliptique, on a:

$$(5.3.8) \quad \left\| \nu_h^1 \right\|_{1,\Omega^S}^2 \leq \frac{1}{\alpha_S} a_S (\nu_h^1, \nu_h^1) \leq \frac{1}{\alpha_S} (\nu_h^1)^t K_h^S \nu_h^1 \leq \frac{1}{\alpha_S} \left\| K_h^S \right\|_2 \left\| \nu_h^1 \right\|_2^2$$

et d'après l'inégalité du triangle:

$$(5.3.9) \quad \left\| \nu_h^1 \right\|_2 \leq \left\| \nu_h^0 \right\|_2 + \Delta t \left\| \frac{\nu_h^1 - \nu_h^0}{\Delta t} \right\|_2$$

Puisque $\Delta t < T$ et d'après le Lemme 5.3.1, on déduit de (5.3.8) et (5.3.9) la relation (5.3.6). \square

Remarque 5.3.1 Les relations (5.3.6) et (5.3.7) représentent des conditions de stabilité pour le schéma complètement discrétisé.

Maintenant, comme une simple conséquence de la stabilité en temps du schéma semi-discrétisé, on a le résultat suivant:

Théorème 5.3.1 *Si*

$$(f_1^n, f_2^n) = (f_1, f_2) \in \left(L^2(\Omega^F) \right)^N \times \left(L^2(\Omega^S) \right)^N, \quad \forall n \geq 0$$

alors le schéma numérique défini par (5.1.15) est inconditionnellement stable en temps, dans le sens qu'il existe une constante C_h , indépendante de n et Δt , telle que

$$\| v_h^n \|_{1, \Omega^F} + \| \nu_h^n \|_{1, \Omega^S} + \| p_h^n \|_{0, \Omega^F} + \| \lambda_h^n \|_{1/2, \Gamma} \leq C_h,$$

$\forall n, \Delta t$ vérifiant $n(\Delta t) \leq T$

Démonstration: Dans les sections précédentes, on a démontré les inclusions $W_h^1 \subseteq W^1$, $W_h^2 \subseteq W^2$, $Q_h \subseteq Q$ et $M_h \subseteq M$. Donc, la démonstration de la stabilité en temps du schéma semi-discrétisé reste valable si on remplace v^h , ν^n , p^n , λ^n par v_h^h , ν_h^n , p_h^n , λ_h^n respectivement, mais la constante qui intervient dépend de h . \square

Chapitre 6

Tests numériques

Dans la première section, on présente les caractéristiques physiques du problème.

Dans la deuxième section, on présente la résolution numérique du problème au premier pas de temps. Les résultats intermédiaires montrent que l'algorithme modifie à chaque itération le contrôle λ , tel que la différence maximale entre les vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact diminue, jusqu'à l'obtention de l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur cette surface de contact.

La troisième section présente les résultats numériques relatifs à plusieurs pas de temps.

6.1 Caractéristiques physiques du problème

Les caractéristiques physiques du fluide sont:

$$\begin{array}{ll} \rho^F &= 1000 \text{ Kg}/m^3 & \text{la masse volumique} \\ \mu^F &= 0.4 \times 10^{-2} Pa.s & \text{la viscosité dynamique} \\ f^1 &= 0 \text{ N}/m^3 & \text{la densité des forces extérieures} \end{array}$$

On obtient une viscosité cinématique

$$\nu_{cin} = \mu^F / \rho^F = 0.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/s$$

Les caractéristiques physiques de la structure sont:

$$\begin{aligned}\rho^S &= 1000 \text{ Kg/m}^3 && \text{la masse volumique} \\ E &= 300000 \text{ Pa} && \text{le module d'Young} \\ \nu &= 0.49 && \text{le coefficient de Poisson} \\ f^2 &= -9810 \text{ N/m}^3 && \text{la densité des forces extérieures}\end{aligned}$$

Ces valeurs ont été utilisées dans Chahboune [1994].

Dans la formulation variationnelle, on a utilisé les coefficients de Lamé μ^S et λ^S . Les relations entre le module d'Young et le coefficient de Poisson d'une part et les coefficients de Lamé d'autre part sont:

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda^S + \mu^S}{\mu^S(3\lambda^S + 2\mu^S)}$$
$$\nu = \frac{\lambda^S}{2(\lambda^S + \mu^S)}$$

Les conditions initiales sont:

$$\begin{aligned}v^0 &= 0 \text{ m/s} && \text{la vitesse initiale du fluide} \\ u^0 &= 0 \text{ m} && \text{le déplacement initial de la structure} \\ \nu^0 &= 0 \text{ m/s} && \text{la vitesse initiale de la structure}\end{aligned}$$

Dans les trois pages suivantes, on présente les maillages et les numéros de références du fluide, de la structure et du couplage fluide structure.

Les conditions aux limites sont:

- sur la frontière de référence 1 du fluide, on impose la condition limite Dirichlet

$$\bar{v} = (0. , 0. , -0.05) \text{ cm/s}$$

- sur la frontière de référence 3 de la structure, on impose la condition limite Dirichlet homogène
- sur la frontière de référence 5 de la structure, on impose la condition limite Neumann homogène

- sur la frontière de contact fluide structure (référence 2 pour le fluide et 4 pour la structure), on impose les conditions de couplage *xi*) et *xii*) du chapitre 2, le paragraphe 1.

Les maillages ont été réalisés en utilisant les codes de MODULEF [1994].

La triangulation du domaine occupé par le fluide comporte:

103 sommets

336 tétraèdres.

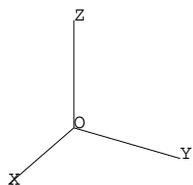
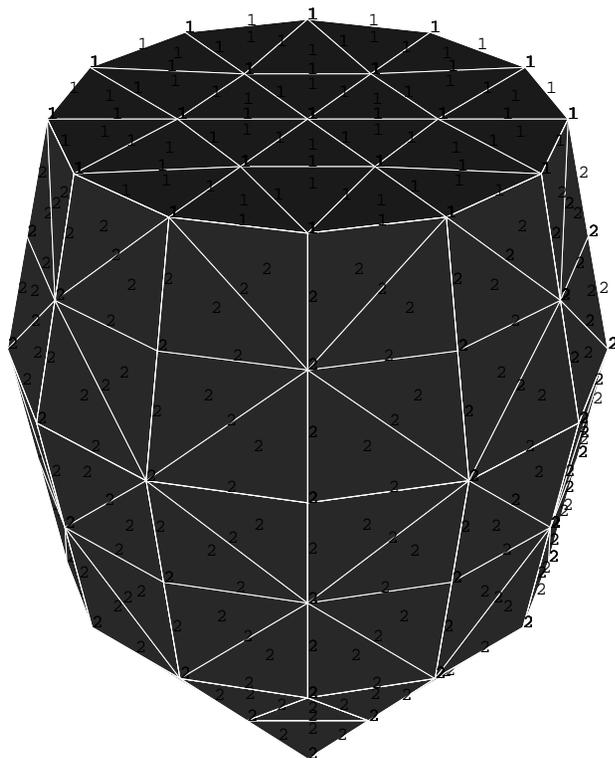
La triangulation du domaine d'étude de la structure comporte:

134 sommets

360 tétraèdres.

Les deux triangulations sont compatibles sur la surface de contact.

Le code pour la résolution découplée du problème tridimensionnel d'interaction fluide structure est écrit en FORTRAN, en utilisant le logiciel NSP1B3 [1991] et les codes MODULEF [1994].



MODULEF : murea

08/07/94

FLUID.NOPO

103 POINTS
 744 FACES
 336 VOLUMES
 336 TETRAEDRES
 1 COMPOSANTE(S) O
 1 COMPOSANTE(S) F

POINT MINIMAL :
 -6.000E-02 -6.000E-02 .000E+00
 POINT MAXIMAL :
 6.000E-02 6.000E-02 .150

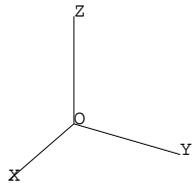
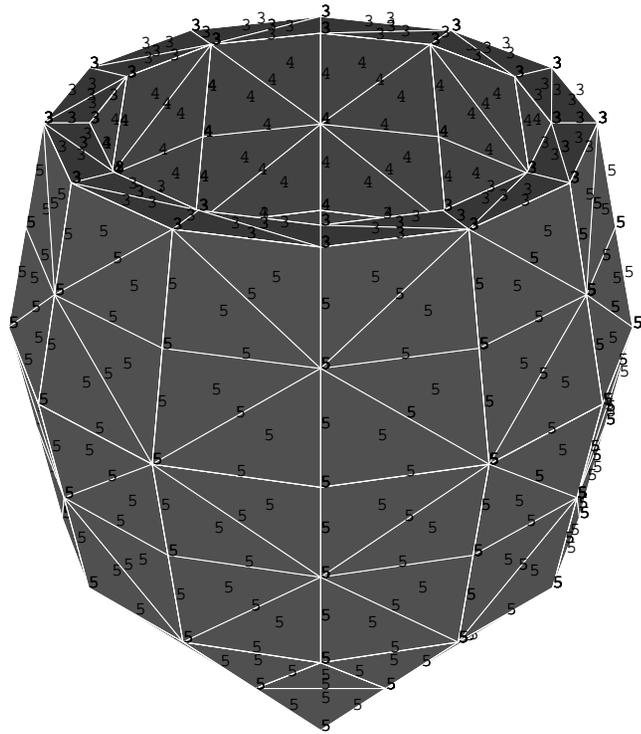
OBSERVATEUR CARTESIEN :
 .489 .282 .401

POINT REGARDER :
 1.863E-09 1.863E-09 7.500E-02

OBSERVATEUR SPHERIQUE :
 30.0 30.0 .652

OUVERTURE :
 10.0

PEAU VUE
 REFERENCE (TOUT)



MODULEF : murea

08/07/94

STRUCT.NOPO

134 POINTS
 852 FACES
 360 VOLUMES
 360 TETRAEDRES
 1 COMPOSANTE(S) O
 1 COMPOSANTE(S) F

POINT MINIMAL :
 -7.000E-02 -7.000E-02 -1.000E-02
 POINT MAXIMAL :
 7.000E-02 7.000E-02 .150

OBSERVATEUR CARTESIEN :
 .550 .317 .436

POINT REGARDER :
 3.725E-08 .000E+00 7.000E-02

OBSERVATEUR SPHERIQUE :
 30.0 30.0 .733

OUVERTURE :
 10.0

PEAU VUE
 REFERENCE (TOUT)

La figure de la page 132 de la version originale apparue dans l'année 1995 n'est plus disponible dans l'actuelle version.

6.2 Résultats intermédiaires

Dans cette section, on présente les résultats intermédiaires pour la résolution du problème fluide structure au premier pas de temps.

On rappelle qu'à chaque pas de temps, le schéma présenté dans le chapitre précédent permet d'obtenir le contrôle frontière λ , tel que les vitesses du fluide et de la structure soient égales sur la surface de contact.

On utilise les mêmes notations que dans la section 5.1 du chapitre précédent:

$I_F = \{A_i\}_{i=1}^{NSF}$ l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^F

$I_S = \{B_i\}_{i=1}^{NSS}$ l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^S

$I_\Gamma = \{C_i\}_{i=1}^{NSG}$ l'ensemble des sommets géométriquement confondus de \mathcal{T}_h^F et \mathcal{T}_h^S

En tenant compte que les triangulations des maillages fluide et structure sont compatibles sur la surface de contact, on a:

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, NSG\}, \\ & \exists! r(i) \in \{1, \dots, NSF\}, \exists! s(i) \in \{1, \dots, NSS\}, \text{ tels que} \\ & C_i = A_{r(i)} = B_{s(i)} \end{aligned}$$

Soient

$$d_{\text{fmax}} = \max_{i=1, \dots, NSG} \|v_{r(i)} - \nu_{s(i)}\|$$

où

$v_{r(i)}$ est la vitesse du fluide dans le point $A_{r(i)}$

$\nu_{s(i)}$ est la vitesse de la structure dans le point $B_{s(i)}$

$\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 .

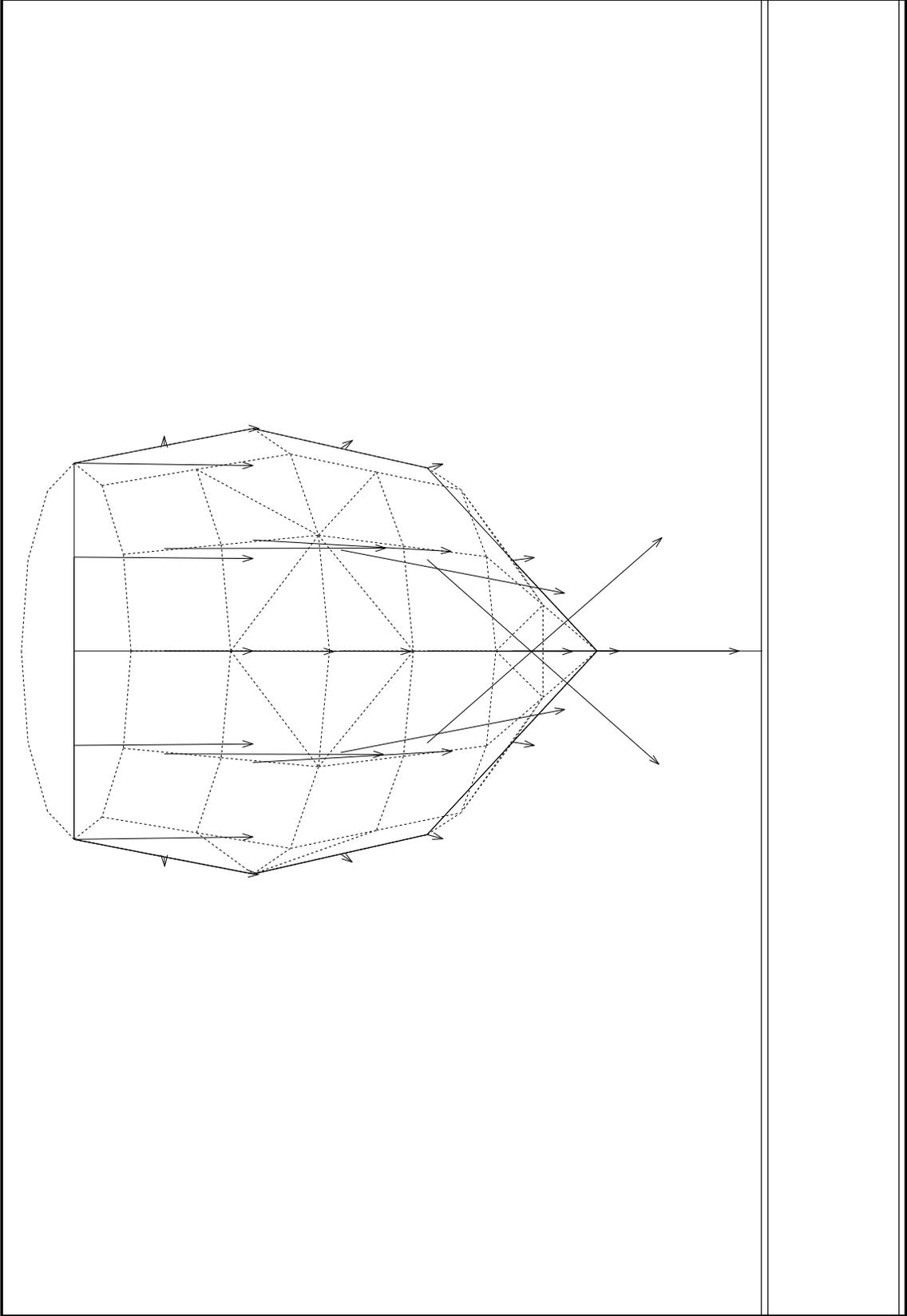
Ces résultats montrent que l'algorithme modifie à chaque itération le contrôle λ , tel que la différence maximale entre les vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact diminue, jusqu'à obtenir l'égalité des vitesses du fluide et de la structure sur la surface de contact.

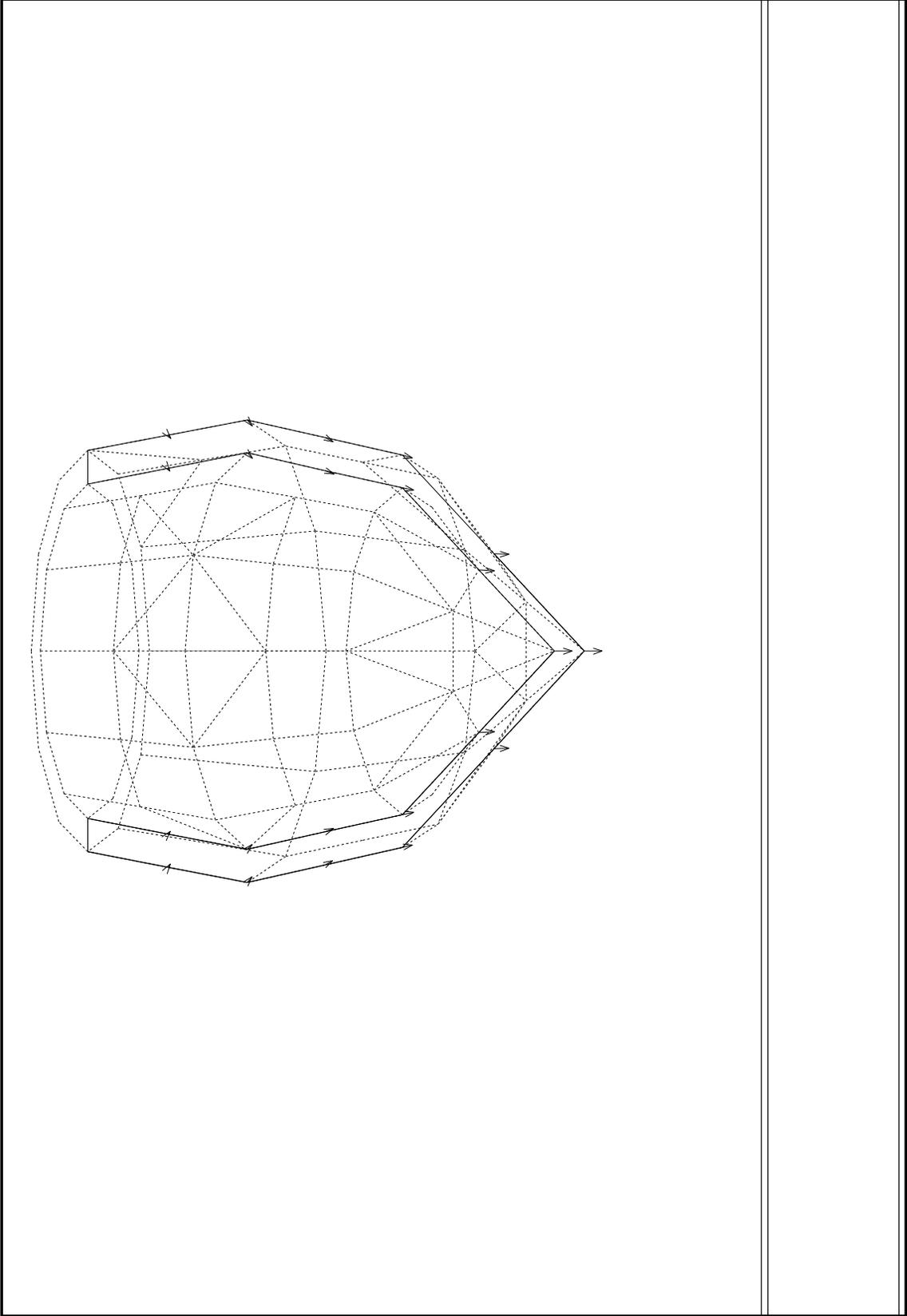
no. d'itérations	difmax (cm/s)
1	5.93
30	3.02
100	1.85
200	1.63
500	1.43
1000	1.17
2000	0.77
3000	0.51
4000	0.34
4500	0.22

On observe que *difmax* diminue fortement pendant les 100 premières itérations et plus lentement après 1000 itérations. Le comportement du fluide est très sensible à la condition limite λ , alors que la structure l'est nettement moins.

Dans les sept pages suivantes, on présente les vitesses sur les frontières du fluide et de la structure à l'instant $t = 0.1$ s, après 1, 30, 100, 1000, 2000, 3000 et 4000 itérations.

Enfin, on présente les vitesses du fluide et de la structure après 4000 itérations dans différents plans.





Les figures pages 135-146 de la version originale apparue dans l'année 1995 ne sont plus disponibles dans l'actuelle version.

6.3 Résultats finaux

Dans cette section, on présente les résultats finaux relatifs aux cinq pas de temps $t_1 = 0.05 \text{ s}$, $t_2 = 0.15 \text{ s}$, $t_3 = 0.25 \text{ s}$, $t_4 = 0.35 \text{ s}$, $t_5 = 0.45 \text{ s}$.

A chaque pas de temps, le schéma calcule les vitesses, les pressions du fluide et les vitesses de la structure.

Pour la visualisation des vitesses du fluide, on a utilisé une homothétie de 0.25.

On observe un déplacement de la structure, même dans le cas où les forces extérieures sont très faibles (forces de gravitation).

Les figures pages 148-162 de la version originale apparue dans l'année 1995 ne sont plus disponibles dans l'actuelle version.

Bibliographie

- [1] BABUSKA (I.)-*Error Bounds for Finite Elements Method*, Numer. Math., t. 16, 1971, p. 322-333
- [2] BARBU (V.) & PRECUPANU (T.)-*Convexity and Optimisation in Banach Spaces*, Ed. Academiei, 1986
- [3] BOUJOT (J.)-*Un problème spectral en élasto-acoustique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 218, p. 431-434, 1975
- [4] BOUJOT (J.)-*Interaction fluide-structure en régime transitoire*, La recherche aérospatiale, no. 3, p. 203-209, 1984
- [5] BOUJOT (J.)-*Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems*, RAIRO, *M²AN*, vol. 21, p. 261-267, 1987
- [6] BREZIS (H.)-*Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983
- [7] BREZZI (F.)-*On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*, RAIRO, t. 8, 1974, p. 129-151
- [8] BREZZI (F.) & FORTIN (M.)-*Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Verlag, 1991
- [9] CHAHBOUNE (B.)-*Simulation numérique par la méthode des éléments finis du couplage fluide-structure. Application au ventricule gauche*, Thèse, Université de Franche-Comté, 1994

- [10] CIARLET (P.G.)-*Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1988
- [11] CLÉMENT (P.)-*Approximation by finite element using local regularisation*, RAIRO, *M²AN*, vol. 9, p. 77-84, 1975
- [12] CROLET (J.M.) & CHAHBOUNE (B.) & AKESBI (S.)-*Presentation of mixed problem fluid-structure from a biomechanical problem*, dans CROLET(J.M.) & OHAYON (R.) Ed. *Computational methods for interaction fluid-structure*, Longman Scientific & Technical, Pitman Research Notes in Mathematics Series 309, 1994
- [13] DAUTRAY (R.) & LIONS (J.L.)-*Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1988
- [14] DUVAUT (G.)-*Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990
- [15] EKELAND (I.) & TEMAM (R.)-*Analise convexe et problèmes variationnels*, Dunod, 1974
- [16] ERRATE (D.) & ESTEBAN (M.) & MADAY (Y.)-*Couplage fluide-structure. Un modèle simplifié en dimension un*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, p. 275-281, 1994
- [17] GIRAULT (V.) & RAVIART (P.A.)-*Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theorie and Algorithms*, Springer Verlag, 1986
- [18] GRISVARD (P.)-*Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985
- [19] HECHT (F.) & PARÉS (C.)-*NSP1B3 un logiciel pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible 3D*, Raport de Recherche 1449, INRIA, 1991
- [20] JOHNSON (C.) & THOMÉE (V.)-*Error estimates for same mixed finite element method for parabolic problems*, RAIRO, *M²AN*, t. 15, p. 41-78, 1981

- [21] LIONS (J.L.)-*Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites Non-linéaires*, Dunod, 1969
- [22] LIONS (J.L.) & MAGENES (E.)-*Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1970
- [23] MODULEF 1994 Une bibliothèque modulaire d'éléments finis,
BERNADOU (M.), GEORGE (P.L.), HASSIM (A.), JOLY (P.), MULLER (B.),
PERRONNET (A.), SALTER (E.), STERR (D.), VANDERBORCK (G.),
VIDRASCU (M.)
- [24] MORAND (H.J.-P.) & OHAYON (R.)-*Interaction fluide-structure*, Masson, 1992
- [25] NEČAS (J.)-*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia,
Prague, 1967
- [26] NEITTAANMAKI (P.) & TIBA (D.)-*Optimal control of nonlinear parabolic systems. Theory, algorithms and applications*, Marcel Dekker Inc., 1994
- [27] PIRONNEAU (O.)-*Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988
- [28] RAVIART (P.A.) & THOMAS (J.-M.)-*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1992
- [29] ROBERTS (J.E.) & THOMAS (J.-M.)-*Mixed and Hybrid Methods*, Handbook of
numerical analysis, vol. II, North Holland, 1991
- [30] SQUEFF (M.C.)-*Superconvergence of mixed finite element methods for parabolic equations*, RAIRO, *M²AN*, t. 21, p. 327-352, 1987
- [31] TEMAM (R.)-*Theory and Numerical Analysis of Navier-Stokes Equations*, North
Holland, 1979
- [32] TEMAM (R.)-*Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, SIAM,
1995