Interaction fluide-structure en 3D. Simulation d'écoulement sanguin dans les artères

Cornel Marius MUREA

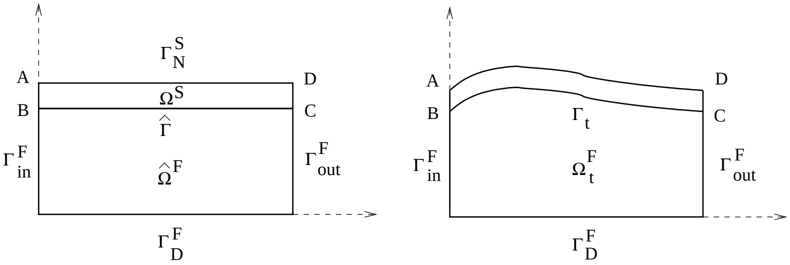
Département de Mathématiques,
Institut de Recherche en Informatique, Mathématique, Automatique et Signal (IRIMAS),
Université de Haute-Alsace,
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
cornel.murea@uha.fr
http://www.math.uha.fr/edp/murea/

Simulation, Modélisation et Calcul Numérique à l'UHA
le 19 janvier 2018

Plan

- Problèmes d'interaction fluide-structure : modélisation mathématique
- Schémas numériques : procédures partagées et monolithiques
- Simulations
  - Écoulement sanguin dans une artère avec anévrisme
  - Écoulement sanguin dans une artère droite ou courbe ou avec sténose
  - Interaction fluide-structure avec contact : simulation d'une valve cardiaque

Interaction fluide-structure



Le domaine structure non déformé $ABCD$.
$\Gamma_D^S =]AB[\cup]CD[$, $\widehat{\Gamma} =]BC[$ et $\Gamma_N^S =]DA[$
Le domaine fluide Ω_t^F de frontière $\partial\Omega_t^F = \overline{\Gamma}_{in}^F \cup \overline{\Gamma}_D^F \cup \overline{\Gamma}_{out}^F \cup \overline{\Gamma}_t$
La frontière mobile Γ_t s'appelle l'interface fluide-structure.

Élasticité

$$
\begin{aligned}
\rho^S \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \sigma^S &= \mathbf{f}^S, \text{ dans } \Omega^S \times]0, T[\\
\mathbf{U} &= 0, \text{ sur } \Gamma_D^S \times]0, T[\\
\sigma^S \mathbf{N}^S &= 0, \text{ sur } \Gamma_N^S \times]0, T[
\end{aligned}
$$

Le tenseur des contraintes

$$\sigma^S = \lambda^S (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} + 2\mu^S \epsilon_{\mathbf{X}}(\mathbf{U})$$

où $\epsilon_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U} + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U})^T\right)$ est le tenseur des déformations linéarisées, $\mathbf{I}$ est la matrice unité et λ^S, μ^S sont les coefficients de Lamé.

Équations de Navier-Stokes

$$
\begin{aligned}
\rho^F \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \sigma^F &= \mathbf{f}^F, \ \forall t \in]0, T[, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \ \forall t \in]0, T[, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t^F \\
\sigma^F \mathbf{n}^F &= \mathbf{h}^F, \ \text{sur } \Gamma_N^F \times]0, T[\\
\mathbf{v} &= 0, \ \text{sur } \Gamma_D^F \times]0, T[
\end{aligned}
$$

Le tenseur des contraintes par

$$
\sigma^F = -p\mathbf{I} + 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v})
$$

où $\epsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\right)$ est le tenseur taux des déformations, μ^F est la viscosité dynamique.

Conditions d'interface et initiales

Conditions d'interface

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\left(\mathbf{X}+\mathbf{U}\left(\mathbf{X},t\right),t\right) &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\left(\mathbf{X},t\right),\ \text{sur } \widehat{\Gamma}\times]0,T[\\
\left(\sigma^F \mathbf{n}^F\right)_{(\mathbf{X}+\mathbf{U}(\mathbf{X},t),t)} &= -\sigma^S\left(\mathbf{X},t\right)\mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}\right),\ \text{sur } \widehat{\Gamma}\times]0,T[
\end{aligned}$$

Conditions initiales

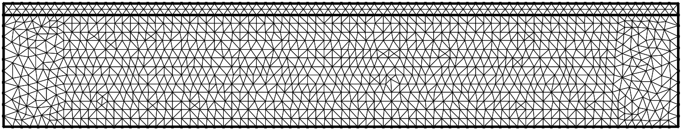
$$\begin{aligned}
\mathbf{U}\left(\mathbf{X},0\right) &= \mathbf{U}_0\left(\mathbf{X}\right),\ \text{dans } \Omega^S\\
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\left(\mathbf{X},0\right) &= \mathbf{U}_1\left(\mathbf{X}\right),\ \text{dans } \Omega^S\\
\mathbf{v}\left(\mathbf{X},0\right) &= \mathbf{v}_0\left(\mathbf{X}\right),\ \text{dans } \Omega_0^F
\end{aligned}$$

Discrétisation en temps et espace

Discrétisation en temps par la Méthode des Différences Finies

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

Discrétisation en espace par la Méthode des Éléments Finis



Procédures partagées

Les inconnues à l'instant de temps $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ sont :
Ω^F_{n+1}, $\mathbf{v}^{n+1}$, p^{n+1}, $\mathbf{u}^{n+1}$.

Schéma implicite

`do`

k:=k+1

$\Omega^F_{n+1,k}$

$\mathbf{v}^{n+1,k}, p^{n+1,k} : \Omega^F_{n+1,k}$

$\mathbf{u}^{n+1,k}$

`until` continuité à l'interface

`save` Ω^F_{n+1}, $\mathbf{v}^{n+1}$, p^{n+1}, $\mathbf{u}^{n+1}$

Schéma semi-implicite

calcul explicite $\widetilde{\Omega}^F_{n+1}$

`do`

k:=k+1

$\mathbf{v}^{n+1,k}, p^{n+1,k} : \widetilde{\Omega}^F_{n+1}$

$\mathbf{u}^{n+1,k}$

`until` continuité à l'interface

`save` $\widetilde{\Omega}^F_{n+1}$, $\mathbf{v}^{n+1}$, p^{n+1}, $\mathbf{u}^{n+1}$

Analyse de la méthode

Convergence

$$\mathbf{u}_h^n(\mathbf{X}) \to \mathbf{u}(\mathbf{X}, n\Delta t)$$

Stabilité

$$\exists K > 0,\ \forall n,\ n\Delta t \leq T, \forall h > 0, \quad \|\mathbf{u}_h^n\| \leq K.$$

S. Sy, C.M. Murea, A stable time advancing scheme for solving fluid-structure interaction problem at small structural displacements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198 (2008), pp. 210-222

C.M. Murea, S. Sy, A fast method for solving fluid-structure interaction problems numerically, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 60 (2009), no. 10, 1149-1172

C.M. Murea, *Stable Numerical Schemes for Fluids, Structures and their Interactions*, ISTE Press and Elsevier, 2017.

L'anévrisme cérébral

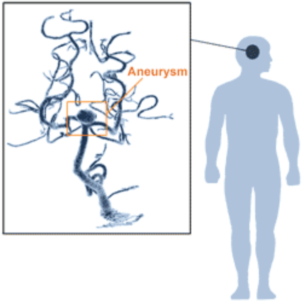


Photo : Univ. Toronto

Formulation Lagrangienne totale (Total Lagrangian) pour la structure élastique

$$\mathbf{F}^n = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{U}^{S,n}$$

Schéma d'Euler implicite

$$\rho_0^S(\mathbf{X}) \frac{\mathbf{V}^{S,n+1}(\mathbf{X}) - \mathbf{V}^{S,n}(\mathbf{X})}{\Delta t} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left(\mathbf{F}^{n+1}\mathbf{\Sigma}^{n+1}\right)(\mathbf{X}) = \rho_0^S(\mathbf{X})\,\mathbf{g}$$
$$\frac{\mathbf{U}^{S,n+1}(\mathbf{X}) - \mathbf{U}^{S,n}(\mathbf{X})}{\Delta t} = \mathbf{V}^{S,n+1}(\mathbf{X})$$

Conséquence

$$\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}^n + \Delta t \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{V}^{S,n+1}$$

$\mathbf{F}^{n+1}$ et $\mathbf{\Sigma}^{n+1}$ dépendent que de $\mathbf{V}^{S,n+1}$, plus de $\mathbf{U}^{S,n+1}$.

Formulation faible Lagrangienne totale

Trouver $\mathbf{V}^{S,n+1} : \Omega_0^S \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{V}^{S,n+1} = 0$ on Γ_0^D, tels que

$$\int_{\Omega_0^S} \rho_0^S \frac{\mathbf{V}^{S,n+1} - \mathbf{V}^{S,n}}{\Delta t} \cdot \mathbf{W}^S \, d\mathbf{X} + \int_{\Omega_0^S} \mathbf{F}^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{W}^S \, d\mathbf{X}$$

$$= \int_{\Omega_0^S} \rho_0^S \mathbf{g} \cdot \mathbf{W}^S \, d\mathbf{X} + \int_{\Gamma_0} \mathbf{F}^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} \mathbf{N}^S \cdot \mathbf{W}^S \, dS$$

pour chaque $\mathbf{W}^S : \Omega_0^S \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{W}^S = 0$ sur Γ_0^D.

Formulation Lagrangienne actualisée (Updated Lagrangian) pour la structure élastique

$$\mathbf{X} \in \Omega_0^S \to \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{\Omega}^S = \Omega_n^S \to \mathbf{x} \in \Omega_{n+1}^S$$

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{X} + \mathbf{U}^{S,n}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}^{S,n+1}(\mathbf{X})$$

$$\widehat{\mathbf{u}}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{U}^{S,n+1}(\mathbf{X}) - \mathbf{U}^{S,n}(\mathbf{X})$$

En posant $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}}\widehat{\mathbf{u}}$, $\widehat{J} = \det \widehat{\mathbf{F}}$ et $J^n = \det \mathbf{F}^n$, on obtient

$$\mathbf{F}^{n+1}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\mathbf{x}})\,\mathbf{F}^n(\mathbf{X}), \quad J^{n+1}(\mathbf{X}) = \widehat{J}(\widehat{\mathbf{x}})\,J^n(\mathbf{X}).$$

$$\sigma^{S,n+1}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{J^{n+1}}\mathbf{F}^{\mathbf{n+1}}\boldsymbol{\Sigma}^{n+1}\left(\mathbf{F}^{n+1}\right)^T\right)(\mathbf{X}), \quad \rho^{S,n}(\widehat{\mathbf{x}}) = \frac{\rho_0^S(\mathbf{X})}{J^n(\mathbf{X})}$$

Formulation faible Lagrangienne actualisée

$$\det(\mathbf{I}+\mathbf{A}) \approx 1 + tr(\mathbf{A}), \quad (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1} \approx \mathbf{I} - \mathbf{A}, \quad \ln(1+x) \approx x$$

On linéarise $\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1} \to \widehat{\mathbf{F}}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ par $\widehat{\mathbf{L}}\left(\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1}\right)$

On donne $\mathbf{U}^{S,n} : \Omega_0^S \to \mathbb{R}^2$, $\widehat{\Omega}^S = \Omega_n^S$ et $\mathbf{v}^{S,n} : \widehat{\Omega}^S \to \mathbb{R}^2$, trouver $\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1} : \widehat{\Omega}^S \to \mathbb{R}^2$, $\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1} = 0$ sur Γ_0^D tels que

$$\int_{\widehat{\Omega}^S} \rho^{S,n} \frac{\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1} - \mathbf{v}^{S,n}}{\Delta t} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^S \, d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\widehat{\Omega}^S} \widehat{\mathbf{L}}\left(\widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1}\right) : \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \widehat{\mathbf{w}}^S \, d\widehat{\mathbf{x}}$$
$$= \int_{\widehat{\Omega}^S} \rho^{S,n} \mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^S \, d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Gamma_0} \mathbf{F}^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} \mathbf{N}^S \cdot \mathbf{W}^S \, dS$$

pour chaque $\widehat{\mathbf{w}}^S : \widehat{\Omega}^S \to \mathbb{R}^2$, $\widehat{\mathbf{w}}^S = 0$ sur Γ_0^D.

Traitement semi-implicite du terme non linéaire de Navier-Stokes. Formulation faible

Trouver $\widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1} : \Omega_n^F \to \mathbb{R}^2$, $\widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1} = 0$ sur Σ_2 et $\widehat{p}^{F,n+1} : \Omega_n^F \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_{\Omega_n^F} \rho^F \frac{\widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1}}{\Delta t} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^F d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^F} \rho^F \left(\left(\left(\mathbf{v}^{F,n} - \vartheta^n \right) \cdot \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \right) \widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1} \right) \cdot \widehat{\mathbf{w}}^F d\widehat{\mathbf{x}}$$

$$- \int_{\Omega_n^F} \left(\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^F \right) \widehat{p}^{F,n+1} d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^F} 2\mu^F \epsilon \left(\widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1} \right) : \epsilon \left(\widehat{\mathbf{w}}^F \right) d\widehat{\mathbf{x}}$$

$$= \mathcal{L}_F(\widehat{\mathbf{w}}^F) + \int_{\Gamma_n} \left(\sigma^F(\widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1}, \widehat{p}^{F,n+1})\mathbf{n}^F \right) \cdot \widehat{\mathbf{w}}^F ds,$$

$$\int_{\Omega_n^F} (\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1}) \widehat{q} \, d\widehat{\mathbf{x}} = 0,$$

pour chaque $\widehat{\mathbf{w}}^F : \Omega_n^F \to \mathbb{R}^2$ tel que $\widehat{\mathbf{w}}^F = 0$ sur Σ_2 et pour chaque $\widehat{q} : \Omega_n^F \to \mathbb{R}$.

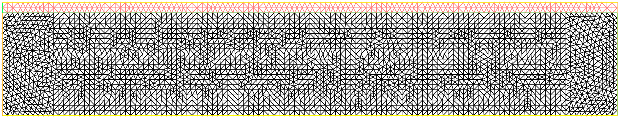
Maillage global

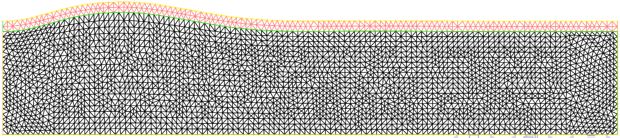
$$\Omega_n = \Omega_n^F \cup \Omega_n^S$$

Vitesses et pressions globales

$$\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} : \Omega_n \to \mathbb{R}^2, \quad \widehat{p}^{n+1} : \Omega_n \to \mathbb{R}$$

$$\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{v}}^{F,n+1} & \text{in } \Omega_n^F \\ \widehat{\mathbf{v}}^{S,n+1} & \text{in } \Omega_n^S \end{cases} \quad \widehat{p}^{n+1} = \begin{cases} \widehat{p}^{F,n+1} & \text{in } \Omega_n^F \\ \widehat{p}^{S,n+1} & \text{in } \Omega_n^S \end{cases}$$





Formulation monolithique

Trouver $\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} \in H^1(\Omega_n)$, $\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} = 0$ sur $\Sigma_2 \cup \Gamma_0^D$ et $\widehat{p} \in L^2(\Omega_n)$, $\widehat{p} = 0$ dans Ω_n^S, telles que:

$$\int_{\Omega_n^F} \rho^F \frac{\widehat{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \widehat{\mathbf{w}} d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^F} \rho^F \left(\left(\left(\mathbf{v}^n - \boldsymbol{\vartheta}^n \right) \cdot \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \right) \widehat{\mathbf{v}}^{n+1} \right) \cdot \widehat{\mathbf{w}} d\widehat{\mathbf{x}}$$

$$- \int_{\Omega_n^F} \left(\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \cdot \widehat{\mathbf{w}} \right) \widehat{p}^{n+1} d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^F} 2\mu^F \epsilon\left(\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} \right) : \epsilon\left(\widehat{\mathbf{w}} \right) d\widehat{\mathbf{x}}$$

$$+ \int_{\Omega_n^S} \rho^{S,n} \frac{\widehat{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \widehat{\mathbf{w}}\, d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^S} \widehat{\mathbf{L}}\left(\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} \right) : \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \widehat{\mathbf{w}}\, d\widehat{\mathbf{x}}$$

$$= \mathcal{L}_F(\widehat{\mathbf{w}}) + \int_{\Omega_n^S} \rho^{S,n} \frac{\mathbf{v}^n}{\Delta t} \cdot \widehat{\mathbf{w}}\, d\widehat{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_n^S} \rho^{S,n} \mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{w}}\, d\widehat{\mathbf{x}},$$

$$\int_{\Omega_n^F} (\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^{n+1}) \widehat{q}\, d\widehat{\mathbf{x}} = 0,$$

pour chaque $\widehat{\mathbf{w}} \in H^1(\Omega_n)$, $\widehat{\mathbf{w}} = 0$ sur $\Sigma_2 \cup \Gamma_0^D$ et pour chaque $\widehat{q} \in L^2(\Omega_n)$.

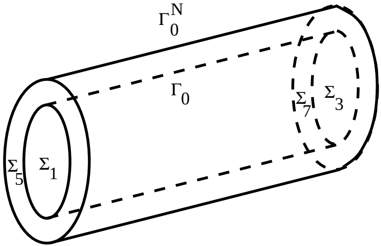
Approches monolithiques

S. Sy, C.M. Murea, Algorithm for solving fluid-structure interaction problem on a global moving mesh, *Coupled Systems Mechanics, An International Journal*, **1** (2012), no. 1, pp. 99-113

C.M. Murea, S. Sy, Updated Lagrangian/Arbitrary Lagrangian Eulerian framework for interaction between a compressible Neo-Hookean structure and an incompressible fluid, Internat. *J. Numer. Methods Engrg.*, **103** (2017) No. 8, 1067-1084

C.M. Murea, Monolithic algorithm for dynamic fluid-structure interaction problem, *Mathematical Modelling in Solid Mechanics*, F. dell Isola et al. (eds.), Advanced Structured Materials 69, Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2017, pp 135-146

Écoulement sanguin dans une artère droite

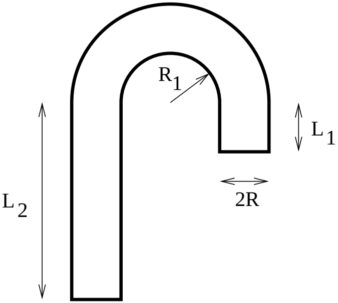


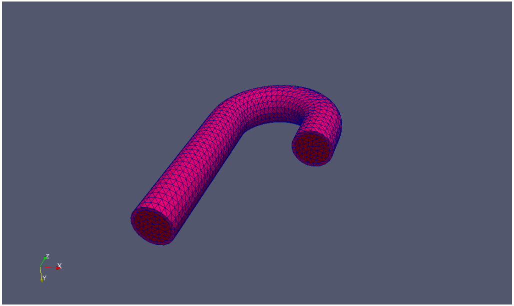
$$L = 5\ cm,\ R = 0.5\ cm,\ h^S = 0.1\ cm$$

	sommets	tétraèdres	DOF
mesh1	768	3510	13602
mesh2	2314	11400	43456
mesh3	8976	47100	177204

MUMPS : MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver
CPU : 44 s (1.1 s/itération) mesh1, 173 s (4.3 s/itération) mesh2 et 1083 s (27 s/itération) mesh3
Processeur 4 x 2.53 GHz, 4 Go RAM

Écoulement sanguin dans une artère courbe



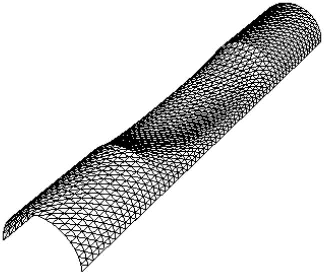


$R = 0.5\ cm,\ R_1 = 1\ cm,\ L_1 = 1\ cm,\ L_2 = 5\ cm,\ h^S = 0.1\ cm$

	sommets	tétraèdres	DOF
mesh1	2079	9828	37800
mesh2	3632	17784	67880
mesh3	5802	29106	110526

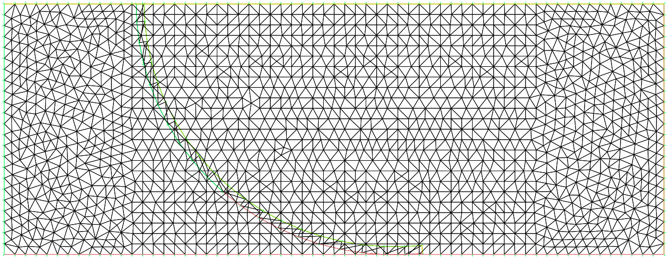
CPU : 255 s (3.18 s/it2ration) mesh1, 502 s (6.2 s/itération) mesh2 et 915 s (11.2 s/itération) mesh3.

Écoulement sanguin dans une artère sténosée



$R = 0.5\ cm$, $x_{min} = -3$, $x_{max} = 3$, $\ell = 1.5\ cm$, $h^S_{min} = 0.1\ cm$, $h^S_{max} = 0.5\ cm$

Interaction fluide-structure avec contact : simulation d'une valve cardiaque



O. Yakhlef and C.M. Murea, Numerical procedure for fluid-structure interaction with the structure displacements limited by a rigid obstacle, *Applied and Computational Mechanics*, **11** (2017) No. 1, 91-104

Conclusions

- Procédures partagées semi-implicites
- Procédure monolithique : formulation lagrangienne actualisée + maillage global
- Résolution du système discret : MUMPS
- Simulations 3D